

## 数 [ 1 ]

以下の問いに答えよ .

- (1)  $(0, \infty)$  上の関数  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  に対して,  $f'(x)$  および  $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$  を求めよ .
- (2)  $\int \sqrt{e^x - 1} dx$  を求めよ .

## 数 [ 2 ]

以下の問いに答えよ .

- (1) 2次元複素列ベクトル  $x$  から行列  $\bar{x}^t x$  を作ると, これは正則でないことを示せ . ただし,  ${}^t x$  は  $x$  の転置ベクトルである .
- (2)  $a, b, c$  を実数とする . 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & a-ib \\ a+ib & 1-c \end{pmatrix}$$

に対して, ある列ベクトル  $x$  が存在して  $A = \bar{x}^t x$  となるための必要十分条件を求めよ .

## 数 [ 3 ]

自然数の集合  $\{m_1, \dots, m_n\}$  に値をとる確率変数  $X$  に対し,  $p_i = P(X = m_i) > 0, i = 1, \dots, n$ , とする .

- (1) 確率分布  $(q_1, \dots, q_n)$  ( $q_i \neq 0$ ) に対し, 次の不等式を示せ .

$$\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{p_i}{q_i} \geq 0.$$

- (2)  $m_i = \lceil -\log_2 p_i \rceil, i = 1, \dots, n$ , ( $\lceil x \rceil$  は  $k \geq x$  なる最小の自然数  $k$ ) のとき,

$$\sum_{i=1}^n 2^{-m_i} \leq 1, \quad E[X] \leq -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i + 1$$

を示せ . ただし,  $E[X]$  は  $X$  の平均値 .

- (3)  $m_1, \dots, m_n$  が  $\sum_{i=1}^n 2^{-m_i} \leq 1$  をみたすとき, 次の不等式を示せ .

$$E[X] \geq -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

## 数 [ 4 ]

実微分可能関数  $x(t)$  と  $y(t)$  が微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 4e^{-t}y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^t x + 4y\end{aligned}$$

を満足するとき，以下の問いに答えよ．

(1)  $z = px + qy$  と  $w = qy$  が微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= -4w, \\ \frac{dw}{dt} &= z.\end{aligned}$$

を満足するように実微分可能関数  $p(t)$ ， $q(t)$  を定めよ．

(2)  $x(0) = 2$ ， $y(0) = 0$  のとき  $x(t)$  と  $y(t)$  を求めよ．

## 数 [ 5 ]

二つの自然数を要素とするような無限個の集合たちからなる族  $\mathcal{F}$  に対し， $\mathcal{F}$  の無限部分族  $\mathcal{G}$  で，次の (1)，(2) いずれかの性質を持つものがとれることを示せ：

- (1) 任意の異なる  $A, B \in \mathcal{G}$  について  $A \cap B = \emptyset$  である，
- (2) 自然数  $a$  が存在して，任意の異なる  $A, B \in \mathcal{G}$  について  $A \cap B = \{a\}$  である．

## 数 [ 6 ]

$\varphi$  をオイラー関数とする．すなわち，自然数  $m$  に対して，1 以上  $m$  以下の自然数で  $m$  と互いに素となる自然数の個数を  $\varphi(m)$  で表わす．このとき，互いに素な自然数  $m, n$  に対して，

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

が成立することを以下を証明することにより示せ．

(1) 任意の整数  $a, b$  に対して，以下の連立合同式の整数解が法  $mn$  で一意的に定まる．

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

- (2)  $m$  と互いに素な整数  $a$  および  $n$  と互いに素な整数  $b$  に対して，上の整数解  $x$  を対応させると，この対応は  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  から  $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$  への全単射となる．
- (3) 互いに素な自然数  $m, n$  に対して，

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

が成立する．

# 数 [ 7 ]

情報システムの選定における評価基準が、機能性、操作性、経済性、信頼性の4項目であり、その代替案がA、B、C、Dの4種類あったとする。いま、それらの階層構造が図1であったとき、階層分析法にしたがって、代替案を最適な順に選定する方法を次の用語を全て用いて述べよ。

”一対比較、重要度（重み）、重要性の尺度、固有値、固有ベクトル、整合度、正規化”

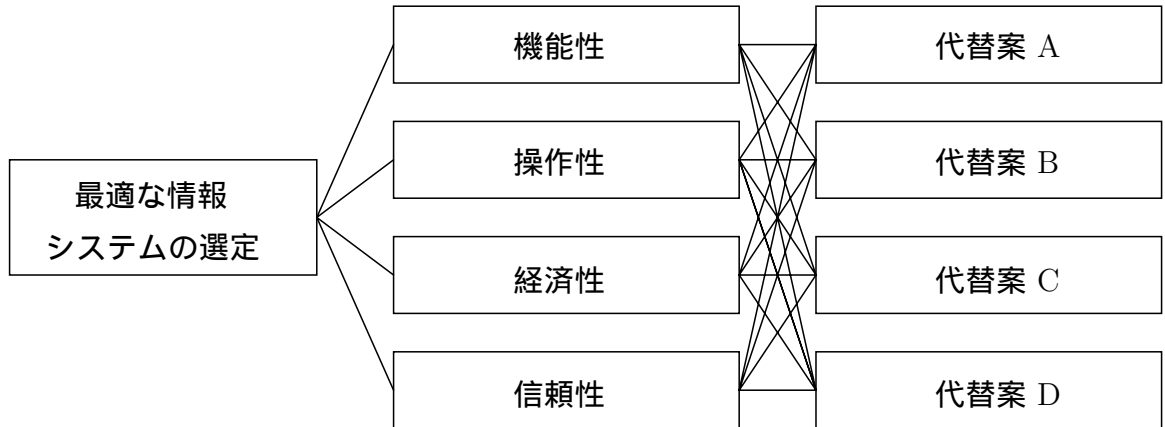


図1 情報システム選定の階層構造