6/18 宿題 解答例

問題3.6(3) $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$

$$y'=\frac{4(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$ より $y'=0$ とすると $x=\pm 1$

$$y''=4(-2x)(1+x^2)^{-2}+4(1-x^2)(-2)(1+x^2)^{-3}(2x)=\frac{-8x(1+x^2)-16x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{-8x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$ より

$y''=0$ とすると $x=0,\ \pm\sqrt{3}$. 増減表は以下の通り

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'		$-$		0		$+$		0		$-$	
y''	$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$
y	↘	$-\sqrt{3}$	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	$\sqrt{3}$	↘
		変曲点		極小		変曲点		極大		変曲点	

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x}{1+x^2}=0$ かつ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{1+x^2}=0$ より

$|x|$が大きくなるにつれ曲線は x軸に近づいていく

よって 変曲点は $(-\sqrt{3},-\sqrt{3}),\ (0,0),\ (\sqrt{3},\sqrt{3})$. $x=-1$ で極小値 -2, $x=1$ で極大値 2 をとる.

以上より グラフの概形は教科書の答のようになる. □

(5) $y=\log(1+x^3)$. $1+x^3>0$ で定義されるので $x>-1$ が定義域

$y'=\dfrac{3x^2}{1+x^3}$ より $y'=0$ とすると $x=0$, $$y''=\frac{6x(1+x^3)-3x^2\cdot 3x^2}{(1+x^3)^2}=\frac{6x-3x^4}{(1+x^3)^2}=\frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$$

$y''=0$ とすると $x=0,\ \sqrt[3]{2}$, 増減表は以下の通り. $y=\log x$ のグラフの性質から

$$\lim_{x\to-1+0}\log(1+x^3)=-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\log(1+x^3)=\infty$$

x	-1		0		$\sqrt[3]{2}$	
y'		$+$	0		$+$	
y''		$-$	0	$+$	0	$-$
y		↗	0	↗	$\log 3$	↗
			変曲点		変曲点	

よって変曲点は $(0,0),\ (\sqrt[3]{2},\log 3)$ で極値はなし. グラフの概形は教科書の答のようになるが,

教科書は変曲点 $(1,\log 2)$ と間違っているので, そこを $(\sqrt[3]{2},\log 3)$ に修正したものが正しい概形 □

演習問題3.5(1) $y=x^4+2x^3-1$

$y'=4x^3+6x^2=2x^2(2x+3)$ より $y'=0$ とすると $x=0,\ -\dfrac{3}{2}$

$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$ より $y''=0$ とすると $x=0,\ -1$

増減表は以下の通り

x		$-3/2$		-1		0	
y'	$-$	0			$+$	0	$+$
y''		$+$		0	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{43}{16}$	↗	-2	↗	-1	↗
		極小		変曲点		変曲点	

よって変曲点は $(-1,-2),\ (0,-1)$ で極値は $x=-3/2$ で極小値 $-\frac{43}{16}$ をとる.

グラフの概形は教科書の答のようになるが, 変曲点 $(-1,-2)$ の y座標の値を書き忘れているので追加すべし

□