

例題 4.2

(2) $t = x+2$ とおくと $dt = dx$ となる

$$\int (x+1)\sqrt{x+2} dx = \int (t-1)\sqrt{t} dt = \int (t^{3/2} - t^{1/2}) dt = \frac{2}{5} t^{5/2} - \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{5} (x+2)^{5/2} - \frac{2}{3} (x+2)^{3/2} + C \quad \triangle$$

(5) $\frac{1}{x \log x} = \frac{(\log x)'}{\log x}$ に注意して $t = \log x$ とおくと $dt = \frac{1}{x} dx$ となる

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C = \log |\log x| + C \quad \triangle$$

(6) $\sin^4 x \cos x = \sin^4 x (\sin x)'$ に注意して $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x dx$

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C \quad \triangle$$

(7) $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{(\sin x)'}{\sin x}$ に注意して $t = \sin x$ とおくと $dt = \cos x dx$

$$\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C = \log |\sin x| + C \quad \triangle$$

(10) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \times \frac{1}{2}$ に注意して $t = x^2+1$ とおくと $dt = 2x dx$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \log |t| + C = \frac{1}{2} \log (x^2+1) + C \quad \triangle$$

例題 4.3

(2) $\int x \cos x dx = x \sin x - \int x' \sin x dx = x \sin x - \int \sin x = x \sin x + \cos x + C \quad \triangle$

(3) $\int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx$
$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{x^2}{4} + C \quad \triangle$$

(4) 部分積分法を2回使う。 e^x の原始関数は e^x であることに注意して、

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \left\{ x e^x - \int x' e^x dx \right\}$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 \int e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2) e^x + C \quad \triangle$$