7/9 宿題解答例

問題5.1 (2) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left[\log x\right]_1^2 = \log 2$ ☑ (3) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2 = 2\sqrt{2}-2$ ☑

5.2 (1) $t=1+8x$ とすると $dt = 8dx$ より

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+8x}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}}+C = \frac{1}{4}(1+8x)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+8x}}dx = \left[\frac{1}{4}(1+8x)^{\frac{1}{2}}\right]_1^3 = \frac{1}{4}\times 5 - \frac{1}{4}\times 3 = \frac{1}{2}$$ ☑

(3) $\log x = t$ とおくと $\frac{1}{x}dx = dt$ なので

$$\int \frac{(\log x)^2}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\log x)^3 + C$$

$$\int_1^2 \frac{(\log x)^2}{x}dx = \left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}(\log 2)^3$$ ☑

5.3 (3) 部分積分法より

$$\int (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x(2\log x)\cdot\frac{1}{x}dx = x(\log x)^2 - 2\int \log x\,dx$$

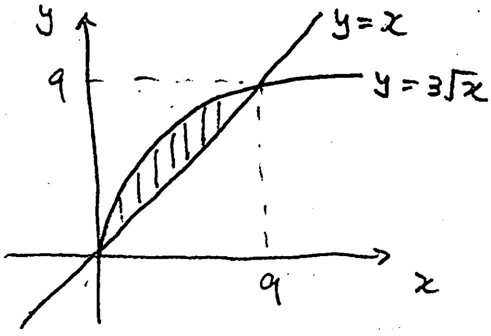
$$= x(\log x)^2 - 2\left(x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right) = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2\int dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C$$

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = \left[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\right]_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e-2$$ ☑

5.6 (4) $y=3\sqrt{x}$ と $y=x$ の交点は $3\sqrt{x}=x$ をといて $x=0, 9$ となるので $(0,0), (9,9)$

$y=x$ と $y=3\sqrt{x}$ のグラフをかくと以下の図のようになり，斜線部の面積を求めればよい.



斜線部の面積を S とすると

$$S = \int_0^9 (3\sqrt{x} - x)dx = \left[2x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = 2\times 27 - \frac{81}{2} = \frac{27}{2}$$ ☑