数学入門演習（7/23）解答例（Cは積分定数）

問題1 (i) 与式$=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+x+3x^2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-\cos x+1+6x}{6x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x+6}{6}=\dfrac{0+6}{6}=\underline{\underline{1}}$ 答

(ii) $\lim_{x\to\infty}\log(e^{2x}-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log(e^{2x}-x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2e^{2x}-1}{e^{2x}-x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2e^{2x}-1}{e^{2x}-x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4e^{2x}}{2e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4}{2-\frac{1}{e^{2x}}}=2$ よって $\lim_{x\to\infty}(e^{2x}-x)^{\frac{1}{x}}=\underline{\underline{e^2}}$ 答

問題2 (i) $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$, $f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$

より $f'''(x)=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=\underline{\underline{-2e^x(\sin x+\cos x)}}$ 答

(ii) $f(x)$のマクローリン級数のx^3の項までの部分和をS_3とすると

$S_3=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}x^3$ で $f(0)=e^0\cos 0=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$

そして $f'''(0)=-2$ なので $S_3=\underline{\underline{1+x-\frac{1}{3}x^3}}$ 答

問題3 (i) $3x-1=t$ とおくと $3dx=dt$ なので

与式$=\displaystyle\int\frac{\frac{t+1}{3}}{\sqrt{t}}\times\frac{dt}{3}=\frac{1}{9}\int(t^{1/2}+t^{-1/2})dt=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}+2t^{1/2}\right)+C=\frac{2}{27}t^{1/2}(t+3)+C$

$=\underline{\underline{\dfrac{2}{27}(3x+2)\sqrt{3x-1}+C}}$ 答

(ii) 与式$=\displaystyle(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\frac{1}{x+1}dx=\underline{\underline{(x+1)\log(x+1)-x+C}}$ 答

問題4 (i) $\cos x=t$ とすると $-\sin x\,dx=dt$ より

$\displaystyle\int\sin x\cos^3 x\,dx=\int t^3(-dt)=-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$ なので、

与式$=\displaystyle\left[-\frac{1}{4}\cos^4 x\right]_0^{\pi/4}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\frac{1}{4}\times 1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}$ 答

(ii) $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx=x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\int 2x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\left(x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}-\dfrac{1}{2}xe^{2x}+\dfrac{1}{4}e^{2x}+C$

よって与式$=\displaystyle\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}=\underline{\underline{\frac{e^2-1}{4}}}$ 答

問題5. (i) $e^{2x}-4e^{x}+3=(e^{x})^2-4e^{x}+3=(e^{x}-1)(e^{x}-3)$ より

$f(x)=0$ の解は $e^{x}=1$ または $e^{x}=3$ をみたす x, つまり $x=0$ または $\log 3$

よって $y=f(x)$ と x軸の交点は $(0,0)$, $(\log 3, 0)$ 答

(ii) $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$ より $\lim_{x\to\infty} f(x)=3$ 答.

(iii) $f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}=2e^{x}(e^{x}-2)$ より $f'(x)=0$ となるのは $e^{x}=2$ なる x, つまり $x=\log 2$

($e^{x}>0$ に注意).

$f''(x)=4e^{2x}-4e^{x}=4e^{x}(e^{x}-1)$ より $f''(x)=0$ となるのは $x=0$

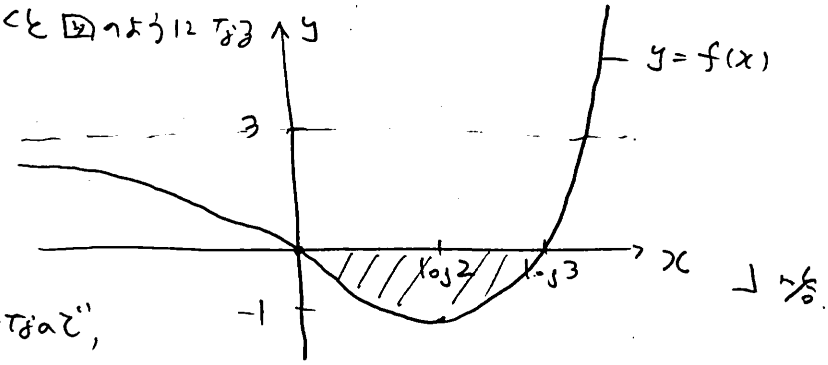
増減表を描くと

x		0		$\log 2$	
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	↘	0 変曲点	↘	-1 極小	↗

変曲点は $(0,0)$ で, 極値は $x=\log 2$ のとき極小値 -1 をとる(極大値は存在しない)

(極小値は $e^{2\log 2}-4e^{\log 2}+3=e^{\log 4}-4e^{\log 2}+3=4-4\times 2+3=-1$ と求められる)

(i), (ii) をふまえてグラフの概形を描くと図のようになる



答

(iv) (iii)の図の斜線部が面積を求める部分なので,

面積を S とすると

$$S=\int_0^{\log 3}(0-f(x))\,dx=\int_0^{\log 3}(-e^{2x}+4e^{x}-3)\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+4e^{x}-3x\right]_0^{\log 3}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{2\log 3}+4e^{\log 3}-3\log 3+\frac{1}{2}-4=-\frac{1}{2}\times 9+4\times 3-3\log 3-\frac{7}{2}=4-3\log 3$$ 答.

問題6. 右図において

太線で囲まれた部分は $S(n)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

斜線で囲まれた部分は $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}=S(n)-1$

なので $S(n)-1<\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx<S(n)$.

$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{n+1}=2\sqrt{n+1}-2$

なので $2\sqrt{n+1}-2<S(n)$ かつ $S(n)-1<2\sqrt{n+1}-2$

つまり $2\sqrt{n+1}-2<S(n)<2\sqrt{n+1}-1$ (証明終)