微分積分学Ⅰ テスト 解答例（問題1は答のみ）

問題1 (i) $\pi/2$ (ii) $1/e$ (iii) 0 (iv) e^3

問題2 (i) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x = 0$, $f(0)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0}\frac{x}{1+e^{1/x}} = 0$ より $f(x)$ は $x=0$ で連続

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+0} 1 = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t} = 1$ より $f(x)$ は $x=0$ で微分可能

問題3 (i) $f(x)=\tan^{-1}x$ とすると $f(0)=0$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f^{(3)}(x)=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ より $f'(0)=1$, $f''(0)=0$ 及び $f^{(3)}(0)=-2$

よって $\tan^{-1}x = f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+o(x^3) = x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(ii) $\dfrac{e^{-x}}{1-x} = \left(1-x+\dfrac{1}{2}(-x)^2+\dfrac{1}{3!}(-x)^3+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right)$

$= 1+x+x^2+x^3-x-x^2-x^3+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3) = 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

問題4 (i) $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$. $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$ とすると

$\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(x+1)(x^2+1)}$ なので $A+B=0$, $B+C=3$, $A+C=-1$ となり

これを解くと $A=-2$, $B=2$, $C=1$. よって 与式 $=\displaystyle\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx = \int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}$

$= -2\log|x+1|+\log(x^2+1)+\tan^{-1}x$ （積分定数省略）

(ii) $\displaystyle\int\sin^{-1}x = x\sin^{-1}x-\int x(\sin^{-1}x)'dx = x\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$ （積分定数省略）

問題5 (i) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-x})dx = 0+\int_0^\infty e^{-x}dx$ $\left(\because \displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0\right)$

$= \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = -0+1 = 1$

(ii) $x=2\sin\theta$ とすると $dx=2\cos\theta\,d\theta$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to 2 \\ \theta & 0\to\pi/2\end{array}$

与式 $=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \cancel{4}^{\,2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos2\theta}{\cancel{2}}d\theta = 2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi$

問題6 $x\geq 1$ において $x^2\geq x$ より $e^{-x^2}\leq e^{-x}$ ゆえ

$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_1^\infty e^{-x}dx$. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} = \Big[-e^{-x}\Big]_1^\infty = \frac{1}{e}$ となって収束するので

$\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ も収束