数理情報学5 演習解答例 (7/18分)

問題1. $Z=X-E(X)$, $W=Y-E(Y)$ とおく. $E((tZ+W)^2)\geq 0$ であるが, 線形性より

$E((tZ+W)^2)=E(Z^2)t^2+2E(ZW)t+E(W^2)$ なので $E(Z^2)t^2+2E(ZW)t+E(W^2)\geq 0$ —(✻)

(✻)はすべての実数tで成立するので $E(Z^2)t^2+2E(ZW)t+E(W^2)=0$ の判別式をDとすると

$D/2=E(ZW)^2-E(Z^2)E(W^2)\leq 0$. よって $E(ZW)^2\leq E(Z^2)E(W^2)$

$E(Z^2)=V(X)$, $E(W^2)=V(Y)$, $E(ZW)=C(X,Y)$ なので $C(X,Y)^2\leq V(X)V(Y)$

$V(X), V(Y)$は正なので $\dfrac{C(X,Y)^2}{V(X)V(Y)}\leq 1$ となり $R(X,Y)=\dfrac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ は -1以上1以下となる □

問題2 (i) Xの確率分布を $P_X(i)$ $(i=0,1,2)$ とすると $P_X(0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{19}{48}$

$P_X(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}=\frac{19}{48}$, $P_X(2)=\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{10}{48}\left(=\frac{5}{24}\right)$ □

(ii) $E(X)=0\times P_X(0)+1\times P_X(1)+2\times P_X(2)=\frac{19}{48}+\frac{20}{48}=\frac{39}{48}\left(=\frac{13}{16}\right)$

$E(X^2)=0^2\times P_X(0)+1^2\times P_X(1)+2^2\times P_X(2)=\frac{19}{48}+\frac{40}{48}=\frac{59}{48}$ □

(iii) $E(Y)=1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\right)+2\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\right)=\frac{19}{48}+\frac{20}{48}=\frac{39}{48}$

$$E(XY)=0\times(P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)+P(1,0)+P(2,0))+1\times P(1,1)+2\times(P(1,2)+P(2,1))$$
$$+4\times P(2,2)$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{31}{48}$$

$C(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{31}{48}-\left(\frac{39}{48}\right)^2=\dfrac{31\times 48-39^2}{48^2}<0$

$V(X), V(Y)>0$ は明らかなので $R(X,Y)<0$ □

(iv) $P(X=0)=\frac{19}{48}$, $P(Y=0)=\frac{19}{48}$ で $P(X=0,Y=0)=\frac{1}{12}$ なので $P(X=0)P(Y=0)\neq P(X=0,Y=0)$

よって X, Y は独立でない. □

(v) $(X,Y)=(0,0)$ のとき $(W,Z)=(0,0)$　　$(X,Y)=(1,1)$ のとき $(W,Z)=(0,1)$

$(X,Y)=(0,1),(1,0)$ のとき $(W,Z)=(1,1)$　　$(X,Y)=(1,2),(2,1)$ のとき $(W,Z)=(1,0)$

$(X,Y)=(0,2),(2,0)$ のとき $(W,Z)=(0,1)$　　$(X,Y)=(2,2)$ のとき $(W,Z)=(0,1)$ なので

W, Zの結合確率分布 $\{g(w,z)\}$ は

$g(0,0)=\frac{1}{12}$, $g(0,1)=\frac{1}{16}\times 2+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$, $g(1,0)=\frac{1}{12}\times 2=\frac{1}{6}$, $g(1,1)=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$ □

(vi) W, Zの結合確率分布を表現する 2×2 行列 $Q=(g(w,z))$ は $Q=\begin{pmatrix}1/12 & 1/4\\ 1/6 & 1/2\end{pmatrix}$

で2つの行が平行なので講義プリント命題4.2より W, Zは独立 □

問題3

(i) X_1, X_2 は独立なので $P(X_2 \geqq 3/2 \mid X_1 \geqq 3/2) = P(X_2 \geqq 3/2) = \int_{3/2}^{\infty} f(x)dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_{3/2}^{2} = \frac{1}{3}$

(ii) X_1 の分布関数を $F(x)$ とすると $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz$ より $F(x) = \begin{cases} 0 & (x<1) \\ 2-\frac{2}{x} & (1 \leqq x \leqq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$

(iii) $\phi(x) = 1-2x$ とすると $\phi^{-1}(x) = \frac{1-x}{2}$ で $\frac{d}{dx}\phi^{-1}(x) = -\frac{1}{2}$

Y の密度関数を $g(x)$ とすると $g(x) = f(\phi^{-1}(x))\left|\frac{d}{dx}\phi^{-1}(x)\right| = \begin{cases} \frac{2}{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2} & \left(1 \leqq \frac{1-x}{2} \leqq 2\right) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

まとめると $g(x) = \begin{cases} \frac{4}{(1-x)^2} & (-3 \leqq x \leqq -1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

(iv) $E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{x^2}dx = 2\log 2$

(v) X_1, X_2 は独立かつ同一の分布なので $E(X_1X_2) = E(X_1)^2 = 4(\log 2)^2$

(vi) $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x^2}dx - (2\log 2)^2 = 2 - 4(\log 2)^2$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立かつ同一の分布なので

$V(\bar{X}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times V(X_1) = \frac{2-4(\log 2)^2}{n}$