整擬順序 (WQO) に関する雑記 *

木原 貴行
名古屋大学 情報学部・情報学研究科

最終更新日: 2023 年 8 月 10 日

目次

---

* 本ノートは，2023 年度春 2 期開講の名古屋大学大学院情報学研究科における講義「数理情報学基礎論概論 2」のための講義資料である．

§1. 整擬順序の歴史

1.1. 順序理論の歴史

順序比較という概念は，あまりにも素朴すぎるため，その歴史を辿るのは難しい．おそらくは紀元前から，もしかすると先史時代から，順序比較という考え方はあったかもしれない．順序の非自明な数学的理論が展開され始めたのがいつであったかということを特定するのも難しい．数学の歴史の中で，古くから数の比較は行われてきたであろうが，順序に関する非自明な結果は一体いつ生み出され始めたのだろうか．

順序比較というあまりにも素朴で自明すぎる概念に対して，厳密な数学的定義を与え，数学的理論を展開しようと試みる数学者はなかなか現れなかったようである．たとえば，筆者の知る限りでは，**全順序** (*linear order*) の数学的定義を最初に明示的に与えたのは，1895 年のカントール (Georg Cantor) であり，**半順序** (*partial order*) については，1900 年代から 10 年代にかけてのハウスドルフ (Felix Hausdorff) である．カントールは全順序の研究に先立って，**順序数** (*ordinal*) の理論を展開しており[*1]，それを一般化する形で全順序型の研究が始められた．ハウスドルフはその時期までの集合論研究を整理し，半順序を始めとする様々な順序概念を導入し，たちまち順序構造に関する高度な数学的理論を築き上げた．

その他の早期の非自明な順序理論としては，19 世紀末における，デデキント (Richard Dedekind) による**束** (*lattice*) の理論や，19 世紀末から 20 世紀初頭にかけては，実数論の公理化などに動機付けられた，**順序体** (*ordered field*) の理論などがあるだろう．20 世紀半ばには，ブルバキ (Nicolas Bourbaki) が，数学を構成する 3 つの母構造 (les structures mère) として「代数構造・順序構造・位相構造」を挙げたように，しばらくすると，順序構造は他の構造と比肩する数学の主要概念の一つとなっていた．

ともあれ，いずれの順序理論も，背景には様々な数学的研究がある．たとえば，カントールの順序数研究の起源がフーリエ級数論にあることはよく知られている．1870 年頃のカントールはフーリエ級数による表示の一意性の研究をしており，例外点をどの程度認めても一意性定理が成立するかを知る必要があった．カントールは，許容可能な例外点の数をカウントするために，有限を超える数概念を必要とし，順序数の概念を導入した．

現代的な定義によれば，順序数とは，**整列順序** (*well-order*) の順序型である．整列順序とは，無限下降列を持たない全順序である．つまり，下降列が必ず有限ステップで停止するような全順序のことを指す．カントールの研究の動機を始めとする歴史的な経緯から，

順序数は「数の無限への拡張」である

と語られることが多いが，むしろ数学的定義を見ると，

[*1] 実際，カントールが順序数論の展開に必要な整列順序の概念を導入したのは 1883 年であった．歴史的には，整列順序 (1883) → 全順序 (1895) → 半順序 (190?) という順に数学的定義が与えられたようである．

順序数は「ある種の有限性を持つ全順序の順序型」である

という点は注目に値するだろう．つまり，順序数（整列順序）は，ただ数学的定義を読解する限りは，「数の無限化」というよりはむしろ「有限性を持つ順序」なのである．

実際，計算理論や証明論などの分野においては，後者の有限停止性，すなわち「下降列が必ず有限ステップで停止する」という性質がしばしば重要となる [2]．たとえば，順序数の整礎性（有限停止性）は，複雑なアルゴリズムが有限ステップで計算を停止することの証明の補助として用いられることもある．

1.2. 整擬順序の歴史 1: ディクソンの補題

カントールの目的は例外点のカウントだったため，全順序しか考察する必要はなかった．つまり，整列順序とはあくまで整礎（無限下降列を持たない）全順序である．しかし，有限停止性や有限基底性といった側面に着目するならば，半順序や擬順序の整礎性もまた重要な役割を帯びてくる．そこで誕生したものが，**整擬順序** (*well-quasi-order*) である．整擬順序の起源を追うのもまた難しい．整擬順序は独立に様々な研究者によって研究され，様々な名称が与えられていた [17]．整擬順序の順序型を**半順序数** (*partial ordinal*) と呼び，半順序数の理論を展開する者もいた, cf. [17].

整列順序 (well-order)	整擬順序 (well-quasi-order)
無限下降列を持たない	無限下降列・無限反鎖を持たない
	無限反上昇列を持たない
空でない部分集合は最小元を持つ	部分集合は有限個の極小元を持ち，それを下界とする
	上方閉集合は有限個の極小元から生成される（有限基底性）
	下方閉集合は有限個の禁止元が決定する

表 1　整列順序と整擬順序の比較（定義の詳細は第 2 節を見よ）

純粋な整擬順序に関する最初の非自明な結果を得た人物として，ディクソン (Leonard Dickson) の名前が挙げられることが多い．積順序の整擬順序性に関するディクソンの補題は，計算機代数におけるグレブナー基底の存在証明 [3] など，様々な文脈で参照されているため，現代でも幅広く知られている．

それでは，何故ディクソンは整擬順序の研究に至ったのだろうか．興味深いことに，ディクソンの補題は，奇数の完全数の研究の中で生まれたものである．奇数の完全数の存在は，数論における最も古い未解決問題のひとつである．1913 年のディクソンの論文 [4] の題は「n 個の異なる素因子を持つ奇完全数と原始過剰数の有限性 (Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors)」であった．つまり，ディクソンは，ある種の数の有限性証明のために整擬順序を必要としたのである．

ディクソンの注目した順序は整除関係 (divisibility) である．つまり，「自然数 m が n を割り切る」という関係 $m \mid n$ のことであるが，これが半順序をなすことは容易に確認できる．しかし，残念ながら，自然数上の整除関係は整擬順序ではない．そこで，ディクソンは，あらかじめ有限個の

素数を固定しておき，それらのいずれかのみを素因数とする自然数について考察した．ディクソンの洞察は，このような自然数たちだけに制限した整除関係が整擬順序をなすというものであった．もう少し詳細に踏み込むと，自然数 n の素因数分解 $n = p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ の指数部 $(n_0, \dots, n_k)$ に注目する．

$$p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} \rightsquigarrow (n_0, \dots, n_k)$$

このとき，素因子が $p_0, \dots, p_k$ の中に含まれる自然数たちの間の整除関係の振る舞いに注目してみよう．

$$p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} \mid p_0^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k} \iff (\forall i \leqslant k)\, n_i \leqslant m_i.$$

このように，整除関係は，素因数分解の指数部の順序比較によって特徴付けられる．つまるところ，p_k より大きい素因子を持たない自然数に関する整除関係は，自然数の k 組に関する積順序と同じものなのである．そして，後者の積順序の整擬順序性を保証するものが，ディクソンの補題である．

補題 1.1 (ディクソンの補題)**.** 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{N}^k$ 上の積順序は整擬順序をなす．

整擬順序性の一つの側面は，有限基底性である．つまり，高々有限個の極小元しか存在しない．ディクソンは，自然数の適切な部分集合だけを抽出したとき，完全数が整除関係における極小元となることに気付き，これにディクソンの補題を適用することで，ある種の完全数の有限性を得た．このアイデアによって，たとえば，固定した素数の有限集合に対して「全ての素因子がその集合に属すような奇完全数は高々有限個しか存在しない」ということなどが示された．

その後，ディクソンの補題は幾度か再証明されることとなる．積構成が整擬順序を保つ，というディクソンの補題の使い所がそれなりにあり，証明もさほど難しくないためである．現代よりも検索が困難な時代には，必要な補題を求めて本の山を捜索するよりも，自ら証明を思索した方が遥かに早いということは多かっただろう．

たとえば，ジャネ (Maurice Janet) は，ディクソンの補題を，現在，計算機代数で参照されるものに近い形式化の下で再証明した，cf. [14]．ディクソンが扱ったものは自然数の素因数分解 $p_0^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ であったが，ジャネが注目したものは**単項式** (monomial), つまり $x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ という形の式であった．1920 年のジャネによる定式化は，以下の形式である．

補題 1.2 (ジャネの補題)**.** 固定した $k \in \mathbb{N}$ について，k 変数単項式たちの間の整除関係は整擬順序をなす．

無論，ジャネの補題はディクソンの補題と全く同値なものである．しかし，ディクソンとジャネの研究の動機は全く異なるものであった．ジャネは線形偏微分方程式の研究をしており，ジャネは単項式 $x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ を以下のような微分作用素と結び付けていたのである [14].

$$\frac{\partial^{n_0 + n_1 + \cdots + n_k}}{\partial x_0^{n_0} \partial x_1^{n_1} \dots \partial x_k^{n_k}}$$

ディクソンの補題の再証明の出版のおそらく最後の例は，1960 年の位相空間論におけるもので，

おそらく既知の事実であろうという注釈の下で，距離空間のある種の一般化に関する定理を示すための技術的補題として再証明されている, cf. [17]．余談であるが，筆者も順序理論とは全く異なる研究においてディクソンの補題が必要になった場面があったが，幸い，筆者はディクソンの補題を既に知っていたので，再証明することはなかった．

1.3. 整擬順序の歴史 2: ヒグマンの補題

ディクソンの補題から数十年は，整擬順序の理論にとって，ほとんど空白の時代であったようである．しばらく時を経て，1940 年代末になった頃，エルデシュ (Paul Erdös) がディクソンの補題に興味を抱いたことによって，整擬順序の理論は大きな動きを見せることとなる．その頃から，整擬順序の理論は，整擬順序性の保存問題が中心的話題となり始める．たとえば，現代では，ディクソンの補題は，積順序による整擬順序性の保存性として提示されることも多い．

補題 1.3 (一般ディクソンの補題)**.** A が整擬順序ならば，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，積順序 A^k もまた整擬順序をなす．

1949 年，ディクソンの補題に触発されエルデシュは，整除関係に関する以下の問題をアメリカ数学月報 (American Mathematical Monthly) に投稿した [7].

問題 1.4. 自然数の無限上昇列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ が整除関係の下で整擬順序をなすならば，有限積 $a_0^{n_0} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$ たちもまた整除関係で整擬順序をなすか？

自然数 a_i たちが有限個の素数である場合が，通常のディクソンの補題である．この問題の困難な点は，k が変動し得るという点である．1952 年，エルデシュはラドー (Richard Rado) と共に，この問題を肯定的に解決した [6]．エルデシュは，ディクソンの原論文に引き摺られて，整除関係の整擬順序性に関する問題を提示したが，すぐに整除関係という特別な順序に拘泥する理由はないと気づいたようである．

この説明のために，少し用語を導入する．擬順序集合 A 上の語 $\bar{a} = a_1 a_2 \dots a_k$ および $\bar{b} = b_1 b_2 \dots b_\ell$ が与えられているとしよう．もし，ある単射単調写像 $h\colon \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, \ell\}$ が存在して，任意の $i \leqslant k$ に対して $a_i \leqslant b_{f(i)}$ となるとき，$\bar{a} \leqslant \bar{b}$ という順序を入れる．これを埋め込み順序と呼び，これは語の集合 A^* 上の擬順序を与える．

語の埋め込み順序は整除順序よりも粗いため，もし語の順序が整擬順序であることを示せるならば，整除関係もまた整擬順序であることを導ける．1952 年，ヒグマン (Graham Higman) は，現在ヒグマンの補題として知られる以下の結果を得た [13].

補題 1.5 (ヒグマンの補題)**.** A が整擬順序ならば，語集合 A^* は埋め込み順序に関して整擬順序をなす．

実際には，ヒグマンはこの補題を普遍代数学の設定の下で分析しており，また，整擬順序の有限基底性を強調している．1952 年のヒグマンの論文 [13] の題は「抽象代数学における整除による順

序 (Ordering by divisibility in abstract algebra)」である．ヒグマンが実際に示した補題は，固定された値以下の項数の関数記号たちに整擬順序が与えられているとき，項代数上の整除関係もまた整擬順序をなすというものである．語の集合は項代数として得ることができるため，上述のヒグマンの補題は，より一般的な代数的補題の特別な場合として得られる．

語上の順序について一点補足しておくと，語は様々な分野において重要な役割を持つが，そのような分野の一つが形式言語理論 (formal language theory) である [24]．形式言語理論の主要な研究対象として，正規言語 (regular language)，すなわち有限オートマトンによって認識可能な言語のクラスがある．1957 年に証明されたマイヒル-ネローデの定理によれば，言語の正規性は，有限個の同値類だけを持つ語上のある合同関係（単調同値関係）について閉じていることと同値である．同値関係を特別な擬順序だと考えると，同値類の有限性は反鎖の有限性に相当するから，この定理は整擬順序とも何らかの関わりがありそうである．実際，1980 年代には，マイヒル-ネローデの定理は一般化され，言語の正規性は，語上のある単調な整擬順序について上に閉じていることと同値であることであることが示された [5]．

1.4. 整擬順序の歴史 3: クラスカルの木の定理

少し時間を遡り，1930 年代末，ヴァジョニ (Andrew Vázsonyi) は，木の同相埋め込み順序が整擬順序をなすという予想を打ち立てた，cf. [16]．現代的なグラフ理論の用語を用いれば，この同相埋め込み順序は，位相マイナー (topological minor) による順序と同一のものである．ヴァジョニはその予想を出版することがなかったため，その予想の背景は明らかになっていないが，お互い十代の頃から交友関係にあったエルデシュが，ヴァジョニ予想を数多くの研究者へと言い広めたようである．ヴァジョニ予想は，エルデシュを介して，クラスカル (Joseph Kruskal) へと伝わり，1950 年代半ばにその解決が宣言された [16]．1954 年にクラスカルがプリンストン大学に提出した博士論文の題目は「整半順序の理論 (The theory of well-partially-ordered sets)」であった．

定理 1.6 (クラスカルの木の定理)**.** 木の位相マイナー順序は整擬順序をなす．

より一般に，クラスカルは，木構成に対する整擬順序性の保存定理も示している．つまり，A が整擬順序ならば，A-ラベル付き木の集合 A^{tree} は位相マイナー順序に関して整擬順序をなす．さて，ヴァジョニ予想の動機は不明瞭であり，クラスカルの木の定理の有用性もさほど明らかではない．それにも関わらず，クラスカルの木の定理は，その後，予想だにしない展開を見せることとなる．これには大きく分けて，

順序理論における発展，グラフ理論における発展，停止性証明への応用的発展

がある．説明の容易なものから順に説明していこう．ディクソンを始めとする多くの人の研究に見られるように，整擬順序性は様々な有限性定理の証明に用いられるものであった．有限性定理は様々な種類のものがあるが，第 1.1 節で述べたように，その一つは，アルゴリズムの有限ステップでの停止性である．理論計算機科学の一分野である**書換系** (*rewriting system*) の理論の主要な研究

テーマは，様々なアルゴリズムの停止性証明である．そのための強力な手法として，1980 年頃になると，再帰経路順序 (recursive path ordering) というものが導入された．この再帰経路順序を用いた停止性証明に，クラスカルの木の定理が本質的に用いられている [2, 37].

純粋な順序理論的発展としては，クラスカルの木の定理から少し時代を遡り，1948 年のことである．フライゼ (Roland Fraïssé) は，可算全順序の整擬順序性に関する予想を打ち立てていた [9].

予想 1 (フライゼ予想)**.** 可算全順序たちは順序埋め込み可能性の下で整擬順序をなす．

注意しておくと，ここまで単に語や木と言っていたものは，有限語や有限木であった．これに対して，フライゼ予想は，可算無限までであれば考慮の対象とする．

順序理論の最初期に高度な理論を展開した一人として，第 1.1 節ではハウスドルフを挙げた．1908 年，ハウスドルフは，全順序の**ハウスドルフ階数** (*Hausdorff rank*) という全順序の強力な分類法を導入していた [12]．これは特に散在型（有理数の順序型を含まない）可算全順序に可算順序数値を割り当てるものであるが，順序数の整礎性より，散在型全順序をより複雑性の小さな散在型全順序に帰納的に分解していくことができる．このアイデアを用いると，任意の散在型可算全順序はより小さな部品から組み上がり，これはつまり，ある種の代数的言語の項として記述できることを意味する．そして，散在型可算全順序たちの順序埋め込み可能性による比較は，それらを表す項の構文木の比較の問題へと持ち込まれるのである．このように，様々な数学的構造の比較問題は，その構造を記述する項の構文木の比較問題へと還元できる場合がある．

$$\text{数学的構造の比較問題} \rightsquigarrow \text{項の構文木の比較問題}$$

ただし，フライゼ予想の場合は，構文木は可算整礎木であり，必ずしも有限木ではない．したがって，そのままクラスカルの木の定理を適用することはできず，可算整礎木に対する整擬順序性定理を新たに示す必要があった．しかし，無限的対象を相手にするには整擬順序性は概念として弱すぎて，帰納法がうまく回らず，既存の整擬順序理論のテクニックを無限へと拡張する試みはいずれも失敗していた．帰納法を回すためには，弱くもなく，強くもなく，正しい強さの概念を導入する必要がある．

それを成し遂げたのが，1960 年代のナッシュ-ウィリアムズ (Crispin Nash-Williams) による**ベター擬順序** (*better-quasi-order*) の理論であった．すなわち，整 (well) より優れたベター (better) な擬順序論である [26]．ベター擬順序の概念は難解であるため，ここでは説明を与えないが，ナッシュ-ウィリアムズはこうしてクラスカルの木の定理を無限整礎木へと拡張した．ただし，構文木はラベル付き木であるため，必要なものはより一般的な保存定理である．この最後のピースをはめたのは，レイヴァー (Richard Laver) である．ベター擬順序の理論の本領は，無限的構成に対する保存性にあり，レイヴァーは整礎無限木構成に対するベター擬順序性の保存を示した．以上のアイデアを巧みに組み合わせ，1969 年，レイヴァーはフライゼ予想の解決を宣言 [20] し，UC バークレー校に博士論文「順序型と整擬順序 (Order types and well-quasi-orderings)」を提出した．

フライゼ予想に限らず，ある種の数学的概念の分析が，木構造の分析に還元されることはしばしばある．たとえば，ある種の計算的プロセスはしばしば木構造として記述される．あるいは，ある

種の極限的方法で定義された概念は，それを近似するプロセスを木構造として記述可能なことがある．

筆者の研究と関連する例として，自然数列の有限分割の比較を挙げよう．自然数 $k \in \mathbb{N}$ を固定したとき，自然数列の k-分割 $f, g\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to k$ について，ある連続写像 $\varphi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在して，$f = g \circ \varphi$ となるとき，$f \leqslant g$ という順序（連続還元順序）を入れることにしよう．興味深いことに，k-分割の順序構造は，我々の数学が如何なる公理を採用しているかに依存する [34].

> 選択公理の仮定下では，連続還元順序は整擬順序をなさないが，
> 決定性公理とラムゼー性公理の仮定下では，連続還元順序は整擬順序をなす．

これは任意の k-分割などという制御不可能なものを扱ったためであり，ボレル可測 k-分割だけを考えれば，公理への依存はなくなる．ボレル可測 k-分割の連続還元順序であれば，いずれの公理の仮定下でも，整擬順序をなし，実際，ベター擬順序である．モンタルバン (Antonio Montalbán) と筆者は，数列のボレル可測 k-分割の連続還元順序が，クラスカルの木の定理，あるいはそのレイヴァーによる一般化，あるいはそのヴェブレン的一般化であるということを発見した [15].

我々の定理によれば，数列のボレル可測 k-分割の連続還元順序は，k-ラベル付き可算整礎木でラベル付けられた可算整礎木でラベル付けられた可算整礎木でラベル付けられた可算整礎木でラベル付けられた……と延々と連なる可算整礎木のマトリョーシカを超限的に重ねた先の不動点を取り，それをラベルとする可算整礎木でラベル付けられた可算整礎木でラベル付けられた……と続くマトリョーシカの超限系列の不動点を取り……の不動点を取り……という操作をさらに超限的に繰り返した結果として得られる，いわば可算整礎木のマトリョーシカのヴェブレン階層と言うべきものと同型である！　そして，このように複雑怪奇な順序構造にもかかわらず，先程述べたように，これは整擬順序（実際，ベター擬順序）なのである．

1.5. 整擬順序の歴史 4: グラフマイナー定理

整擬順序理論のグラフ理論における発展においても述べておきたい．グラフ理論の主要な対象の一つとして，平面的グラフ，つまり平面に交差なく書けるグラフがある．黎明期の数学的展開としては，歴史を大きく遡るが，1852 年のガスリー (Francis Guthrie) による四色問題 (four color problem) があるだろう．この問題は，平面上のいかなる地図が与えられても，隣接する領域が同じ色にならないように 4 色で塗り分けることができるかどうかを問う問題で，専門用語を用いれば，平面的グラフの 4-彩色可能性のことである．この問題は，1976 年に肯定的に解決し，晴れて四色定理 (four color theorem) となった [1]．この証明がコンピュータの力を借りた膨大な証明であったため，当初は賛否入り混じる様々な反応があったが，現代的な観点からは，コンピュータ援用証明の初期の非自明な例として，歴史的に大きな価値を持つものであったと言えるかもしれない．

ともあれ，平面的グラフはグラフ理論における主要な研究対象のひとつである．1930 年，クラトフスキ (Kazimierz Kuratowski) は，平面的グラフの興味深い特徴付けを発見した．グラフが平面的であることと，5 頂点完全グラフ K_5 と $(3, 3)$ 頂点完全二部グラフ $K_{3,3}$ を位相的に含むこと

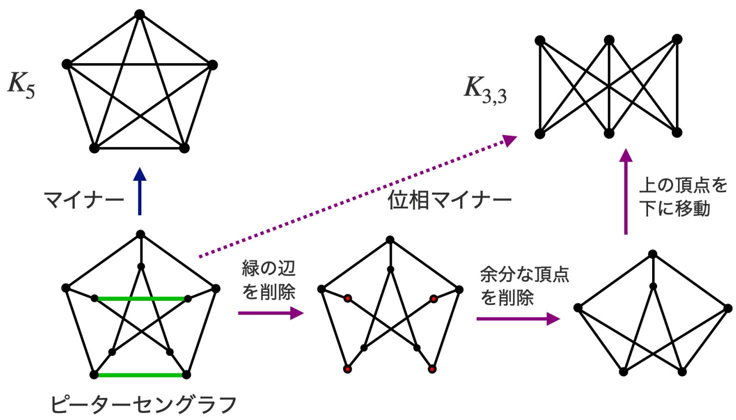


図 1　K_5 と $K_{3,3}$ とピーターセングラフ

は同値である [19].

$$\text{グラフが平面的である} \iff K_5 \text{ と } K_{3,3} \text{ のいずれも位相マイナーとして含まない.}$$

1937 年，ワグナー (Klaus Wagner) は，位相マイナー操作に辺の縮約操作を付加したマイナー操作について考察し，同様の特徴付けを得られることを示した [35].

$$\text{グラフが平面的である} \iff K_5 \text{ と } K_{3,3} \text{ のいずれもマイナーとして含まない.}$$

マイナーの方が位相マイナーよりも真に強力な概念であり，たとえばピーターセングラフ (Petersen graph) は K_5 をマイナーとして持つが位相マイナーとしては含まない．一方，$K_{3,3}$ を位相マイナーとして持つ (図 1)．平面的グラフに対する K_5 や $K_{3,3}$ のことを禁止マイナー (forbidden minor) と呼ぶ.

その後，平面性だけでなく，他にもグラフに関する様々な性質が，有限個の禁止マイナーによって特徴付けられることが示されていくこととなった．したがって，もっとも楽観的な予想は，グラフに関するあらゆる性質が，有限個の禁止マイナーによる特徴付けを持つというものであろう．厳密なことを言えば，マイナー閉 (minor closed) な性質に制限する必要があるが，いつ頃からか，ワグナーはこの予想に到達し [36]，この楽観的な予想はワグナー予想と呼ばれることになった.

この予想を詳細に分析してみよう．常に有限個の禁止マイナーによる特徴付けを持つ，という性質は，つまるところ有限基底性である．そして，実際，ワグナー予想は「グラフのマイナー順序は整擬順序である」という主張と同値であり，実際，ワグナーが最初に明示的に彼の予想を提示した文章では，この形式で書かれている.

おそらく第 1.4 節のヴァジョニ予想の背景もまた，クラトフスキやワグナーの定理が背景にあったのかもしれない．彼は，木の位相マイナー順序の整擬順序性の他にも，サブキュービック・グラフ (subcubic graph) の位相マイナー順序の整擬順序性の問題も打ち立てていたようである．これらはグラフの特別な場合であり，ヴァジョニ予想の解決，すなわちクラスカルの木の定理が述べる

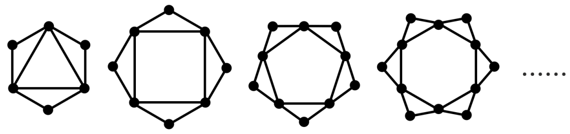


図 2　位相マイナーの無限反鎖

ことは「木に関する如何なる位相マイナー閉な性質も，有限個の禁止位相マイナーによって特徴付けられる」ということに他ならない．

1983 年から 2004 年にかけて，ロバートソン (Neil Robertson) とシーモア (Paul Seymour) は，「グラフマイナー」の名を冠する合計 500 頁を超える 20 編の論文を出版し，その第 20 論文「グラフマイナー XX」で，ワグナー予想の解決を宣言した [30].

定理 1.7 (グラフ・マイナー定理)**.** グラフのマイナー順序は整擬順序である．

この定理は，しばしばグラフ理論における最も深い定理として参照されることもあり，その後もグラフ理論に大きな影響を与えている．

ところで，ワグナー予想はマイナーに関するものであるが，ヴァジョニ予想は位相マイナーに関するものであった．それならば，ヴァジョニ予想の最も楽観的な一般化として，「グラフの位相マイナー順序は整擬順序である」という予想を考えたらどうだろうか……と思うかもしれないが，これは残念ながら偽である．たとえば，各 n 毎に，各辺が二重辺になっている n 角形と位相的に等しいグラフを考えると，これらは位相マイナー順序における無限反鎖をなしている (図 2).

したがって，位相マイナー順序に関するクラスカルの木の定理は，一般のグラフには拡張できない……いや，それは本当だろうか？　本当にクラスカルの木の定理は，位相マイナー順序に関する定理だったのだろうか？　本稿では，木をある種の代数的言語の項として取り扱い，項順序に関する定理として，クラスカルの木の定理を証明する．つまり，クラスカルの木の定理は，位相マイナー順序ではなく項順序に関する定理であり，この項順序がたまたま位相マイナー順序と同値になる．あるいは，木を下半束として記述したとき，クラスカルの木の定理は，下半束埋め込み順序に関する定理として表されることもある．そして，木であるような下半束に制限したとき，下半束埋め込み順序はたまたま位相マイナー順序に一致する．

つまるところ，クラスカルの木の定理は，本来は位相マイナーではない別の順序—項順序または下半束埋め込み順序，あるいは他の何か—に関する定理であり，木に制限したときは，たまたま位相マイナーに一致していただけではないだろうか．そして，その別の順序については，木だけではなく一般のグラフへと定理を拡張できるのではないだろうか．このような考えに至ったのは，1960 年代のナッシュ-ウィリアムズであった．彼は 1964 年 [25] に弱嵌め込み (weak immersion), 1965 年 [26] に強嵌め込み (strong immersion) による順序を導入し，木やサブキュービック・グラフについては，弱嵌め込み，強嵌め込み，位相マイナーよる順序のいずれも同値であることを指摘した．そして，ヴァジョニ予想の一般化として，彼は「グラフの弱/強嵌め込み順序は整擬順序である」と予想したのである [25, 26].

2010 年，ロバートソンとシーモアは第 23 論文「グラフマイナー XXIII」を出版し，ナッシュ-ウィリアムズの弱嵌め込み予想の解決を宣言した [31].

定理 1.8. グラフの弱嵌め込み順序は整擬順序である．

特に，グラフに関する如何なる弱嵌め込み閉な性質も，有限個の禁止弱嵌め込みによって特徴付けられる．マイナー順序と弱嵌め込み順序は比較不可能であるから，同じグラフの性質であっても，それを特徴づける有限個の禁止マイナーと有限個の禁止弱嵌め込みは全く別物であるということもあり得る．彼らは強嵌め込み予想も解決できると考えていたようであるが，2023 年現在では，ナッシュ-ウィリアムズの強嵌め込み予想は未解決であるとされている [22].

さて，位相マイナーではなく嵌め込みに一旦視線を向けたものの，位相マイナーの整擬順序性に関する問題を完全に切り捨てるわけではない．グラフの位相マイナーは整擬順序をなさないものの，これまでに発見された全ての無限反鎖には，ある種の共通項があった．先程挙げた例 (図 2) は二重辺の多角形であったが，いずれの例にも共通するものは，二重辺の鎖である．

1980 年代，ロバートソンは，この二重辺の鎖が位相マイナーの反鎖のためにクリティカルなものであると考えた．そして，各自然数 k に対して「長さ k の二重辺の鎖を位相マイナーとして含まないグラフは，位相マイナー順序に関して整擬順序をなす」と予想したのである．たとえば，サブキュービック・グラフは長さ 2 の二重辺の鎖を含まないので，ロバートソン予想は，ヴァジョニのサブキュービック・グラフ予想より遥かに強い．

筆者は，2016 年にドイツのダグシュツール (Dagstuhl) で開催された「計算機科学における整擬順序 (Well-Quasi-Orders in Computer Science)」という会議に招待されたときに，この位相マイナーに関するロバートソン予想を知った．そこには Chun-Hung Liu という若いグラフ理論家 [22] も招待されており，彼がロバートソン予想の肯定的解決を宣言していたのである [23].

Liu らによる位相マイナーに関するロバートソン予想の解決のプレプリントは公開されているものの，2023 年現在，査読はまだ終了していないようである．したがって，ロバートソン予想が解決された，と断定するのは一旦留保しておくことにする．とはいっても，これくらい査読に時間がかかることは，さほど珍しいことでもない．むしろ大未解決問題の解決となれば標準的なことだろう．筆者の著作の範囲内でさえ，大未解決問題の解決ですらなくとも，最初にジャーナルに投稿してから査読が終了してアクセプトされるまでに 5 年以上の期間を要した論文は複数ある．

1.6. 整擬順序の歴史 5: 数学基礎論

整擬順序の理論は，数学基礎論においても重要な役割を持つ．1930 年代のゲーデルの第一不完全性定理より，十分な算術を含む無矛盾な再帰的公理化可能な理論では，肯定も否定も証明できない命題，すなわち独立命題が存在する．しかし，ゲーデルの第一不完全性定理はあくまで独立命題の存在を主張するだけの存在定理であり，具体的にどの数学的定理が独立命題かを教えてくれるものではない．メタ数学的な主張とは異なる，具体的な独立命題が発見され始めたのは，ゲーデルの不完全性定理から 30 年以上後，1960 年代のことである．

ゲーデルの不完全性定理は，算術体系だけでなく，集合論の体系などにも適用可能であるから，たとえば，ZF 集合論に適用すれば，ZF 集合論が無矛盾ならば，ZF 集合論で肯定も否定も証明できない命題があるはずだ．その具体例として，現在最も良く知られているものは，連続体仮説 (continuum hypothesis) であろう．これは 19 世紀にカントールが提示した仮説で，様々な同値な定式化を持つが，最もわかりやすい定式化は「自然数の濃度と実数の濃度の中間濃度は存在しない」というものだろう．この問題は，20 世紀数学が取り組むべき重要な問題のリストとして 1900 年に提示されたヒルベルトの 23 の問題の第 1 題を飾ることとなった．

先程も述べたように，ゲーデルの第一不完全性定理はただの存在定理であるため，具体的な数学的命題の独立性証明のためには，ゲーデルの不完全性定理とは全く異なる大道具が必要だ．1940 年，ゲーデルは構成可能宇宙 L という集合論のモデルの構成法を提示し，ZF の無矛盾性の仮定の下で，選択公理と連続体仮説の無矛盾性を証明した．1963 年，コーエンは強制法と呼ばれる手法を導入し，大量のコーエン実数を集合論のモデルに付加することによって，連続体仮説の否定のモデルを構築した．ゲーデルとコーエンの結果を合わせると，ZFC 集合論の無矛盾性の仮定の下では，ZFC 集合論では連続体仮説の肯定も否定も証明できない [18]．すなわち，19 世紀にカントールが提示した連続体仮説は独立命題であったのだ．

ZFC 集合論の独立命題の具体例は，現在に至るまでに数多く見つかっている．たとえば，測度論の研究において 1919 年にボレルが提示した強零集合の可算性の問題（ボレル予想）は，ZFC 集合論の独立命題である．これを示したのは，整擬順序の理論でも既に名を挙げたレイヴァーであり，それは 1976 年のことであった [21]．また，シェラー (Saharon Shelah) は，1950 年代にアーベル群論において提示されたホワイトヘッド予想が，ZFC 集合論の独立命題であることを 1973 年に証明している [32]．21 世紀になってからは，作用素環論におけるカルキン環の外部自己同型の存在が ZFC 集合論から独立であることが示されたことも大きな衝撃であった [8, 28]．

ここまでは集合論における独立命題であったが，集合論は極めて強力な体系であるため，自然な数学的独立命題は，やはり連続体のような無限的オブジェクトを伴うものとなる．それでは，有限的なオブジェクトのみを伴う独立命題はあるだろうか．もちろん，メタ数学的な独立命題であれば，有限的な算術的独立命題は構成できるものの，自然なものを議論するとなると，まずは小さな枠組みから考えるのが適切だ．つまり，集合論のような数学全般を実装可能な巨大システムよりも，まずは算術のシステム，解析のシステムのような数学の一部を扱うシステムにおける証明可能性を議論したい．

ある数学的枠組について理解するためには，制限された枠組での可解性について分析することはしばしば有用だ．たとえば，方程式の代数的可解性や非可解性に関する議論の歴史は長い．同様にして，集合論的解法があるにせよ，算術的解法が無い，解析的解法が無い，と言ったようなこともあり得るはずである．つまり，集合論の体系では証明可能だが，しかし，算術体系では独立命題になるといったことはあり得る．数学基礎論的な価値を述べるならば，集合論の体系よりも算術体系の方が無矛盾性の確度は高く，一般的に，より弱い体系の無矛盾性の確度は高いと言えよう．また，限定算術などの体系であれば，弱い体系での証明可能性と，低い計算量での計算可能性との間には深い関連がある．

算術体系，すなわち自然数論の形式体系として現在よく用いられているものは，一階ペアノ算術 (Peano arithmetic) である．一階ペアノ算術における数学的独立命題の例としては，グラフ理論における有限ラムゼーの定理の亜種であるパリス-ハーリントンの定理 (Paris-Harrington theorem) がよく知られている [27]．有限ラムゼーの定理自体はもちろん自然な数学的定理として誕生したものであるが，しかし，その亜種であるパリス-ハーリントンの定理は，独立命題となるように 1977 年に人工的に設計されたものであるから，自然な数学的定理と言えるかについては議論の余地がある．

さて，数学基礎論において整擬順序の理論が注目された理由は幾つかある．その一つは，クラスカルの木の定理を証明するために極めて強い公理が必要とされることが発見されたためである．既に述べたように，クラスカルの木の定理はグラフ理論の研究の中で誕生した純粋な数学的定理である．さらにこれは有限木という《有限的オブジェクト》に関する定理であるから，上述の ZFC 独立命題たちとは状況が大きく異なるという点には注意したい．

クラスカルの木の定理の証明のためにはどの程度強力な公理が必要なのだろうか．ペアノ算術の保存的拡大である二階算術の部分体系 ACA_0 に，更に強力な算術的超限再帰 (arithmetical transfinite recursion) の公理図式を加えた体系として ATR_0 と呼ばれるものがある．高々可算生成的な対象（整数，実数，可算代数構造，可分距離空間など）に関するほとんどの日常的数学的命題は，ATR_0 どころかそれより遥かに弱い体系で証明可能であることが知られている．しかし，驚くべきことに，1980 年代，フリードマン (Harvey Friedman) は，クラスカルの定理は ATR_0 という強力な体系を用いても証明不可能であることを示したのである [11, 33]．

話はここでは終わりではない．クラスカルの定理の大規模な一般化として，ロバートソン-シーモアのグラフマイナー定理があった．2004 年にグラフマイナー定理の完全証明が出版されるよりかなり前に，フリードマンは，ロバートソンとシーモアと共にグラフマイナー問題の証明不可能性の分析を進めていた．彼らは，1987 年に「グラフマイナー定理のメタ数学 (The metamathematics of the graph minor theorem)」という論文を出版し，ATR_0 よりも強力な Π^1_1-CA_0 という体系ですらグラフマイナー定理は証明不可能であることを示したのである [10]．

定理 1.9. クラスカルの木の定理は ATR_0 では証明不可能であるが，Π^1_1-CA_0 からは証明可能である．グラフマイナー定理は Π^1_1-CA_0 でも証明不可能である．

クラスカルの木の定理やグラフマイナー定理は，有限木や有限グラフに関する定理である．この意味で，ある程度の有限性を持つ定理にも関わらず，ここまで強力な公理を必要とするというのは非常に衝撃的なことである．しかし，正確に言えば，整擬順序性，つまり反上昇列の有限停止性という性質を記述するには，無限列の概念に言及する必要があるため，完全には有限的定理というわけではない．

そこでフリードマンは，クラスカルの木の定理およびグラフマイナー定理の完全な有限化 (miniaturization) を導入した．ここでは，統一的な取り扱いのために，整擬順序概念の有限化を導入しよう．整擬順序性は，反上昇列の有限停止性を述べるものであったが，この反上昇列の長さの上界 $\ell(k)$ を与えることによって，主張の有限化を行う．

定義 1.10. 擬順序 Q が緩整擬順序 (slow well-quasi-order) であるとは，任意の自然数 k に対して，次のような自然数 $\ell_Q(k)$ が存在する．第 s 項 a_s のサイズが $k+s$ 以下であるような長さ $\ell_Q(k)$ の列 $(a_s)_{s<\ell_Q(k)}$ は，反上昇列ではない．

ここで，擬順序 Q の元には何らかのサイズ概念が定義されている．たとえば，木やグラフならば頂点数である．クラスカルの木の定理とコンパクト性を組み合わせれば，木の位相マイナー順序は緩整擬順序であることが導かれる．木の位相マイナー順序の緩整擬順序性は，有限的なオブジェクトに関する算術的命題であり，これもまた ATR_0 の独立命題である．

緩整擬順序性の証拠 $\ell_Q(k)$ は，一般的には巨大数を生み出すことが知られる．クラスカルの木の定理の緩整擬順序性の最小の証拠は，特に $\mathsf{tree}(k)$ という名で巨大数論の文脈でよく知られている[*2]．巨大数 $\mathsf{tree}(k)$ については，筆者の講義ノート「巨大数の樹海へようこそ！」を見よ．同様に，サブキュービック・グラフの緩整半順序を考えると，単純サブキュービック・グラフ数 $\mathsf{SSCG}(k)$ というさらなる巨大数が与えられる．

以下の定理の詳細は説明しないが，数学基礎論的には，緩整擬順序性の概念は，理論の 1-無矛盾性と深く結び付いている [33].

定理 1.11 (ACA_0)**.** 原始再帰的擬順序 Q の極大順序型が T の証明論的順序数と等しいとする．このとき，以下が成立する．

$$T \text{ は 1-無矛盾である} \iff Q \text{ は緩整擬順序である．}$$

このように，緩整擬順序性の証拠，つまり巨大数 $\ell_Q(k)$ の分析は数学基礎論的に大きな意味を持つ．より正確には，数学基礎論においては，急増加関数 $k \mapsto \ell_Q(k)$ の増大度の分析が，理論の証明論的強さを測る指標として重要な役割を持つ．

本節と関連する内容については，最近のアメリカ数学会の Notice 記事「理論の強さを測る技術 (The art of measuring the strength of theories)」にもまとまっている [29].

[*2] $\mathsf{tree}(k)$ と他の有名な巨大数との比較についてコメントをしておこう．他の巨大数として，たとえば，数学の証明で用いられた最大の数として昔ギネス記録となった巨大数であるグラハム数がよく知られている．しかし，$\mathsf{tree}(k)$ の巨大さに比べるとグラハム数は塵芥どころかもはや無に等しい．さらに言えば，グラハム数はラムゼー理論の文脈で証明の上界として用いられた数であるものの，あくまで上界の 1 つでしかないため，その数自体に特に数学的な意味はない．一方で，$\mathsf{tree}(k)$ は，緩整擬順序性の最小の証拠という数学的な意味を持つ定数である．

§ 2. 整擬順序の理論

2.1. 整擬順序の特徴付け

不等式というものは，つまりは順序に関する式である．数学では，順序に関する様々な性質が研究されている．以下の反射律および推移律を満たす順序 $\leqslant$ のことを前順序 (preorder) または擬順序 (quasi-order) という．

$$\text{反射律:}\quad x \leqslant x \qquad\qquad \text{推移律:}\quad (x \leqslant y \ \&\ y \leqslant z) \implies x \leqslant z$$

さらに，以下の反対称律を満たす前順序は半順序 (partial order) と呼ばれ，以下の比較可能律を満たす半順序は全順序 (linear order) と呼ばれる．

$$\text{反対称律:}\quad (x \leqslant y \text{ and } y \leqslant x) \implies x = y \qquad\qquad \text{比較可能律:}\quad x \leqslant y \text{ or } y \leqslant x$$

ここから議論するものは，「良い順序」とは何か，ということである．「良い順序」として，英語では well-order と呼ばれる概念があり，日本語では整列順序と訳される．整列順序には様々な同値な定義が知られるが，まずは以下の定義について考えよう．

整列順序とは，無限下降列を持たない全順序のことである．

これはあくまで「良い全順序」である．それでは「良い擬順序」すなわち well-quasi-order とは何であるかについて考えよう．全順序の場合，下降 $x > y$ と非上昇 $x \not\leqslant y$ は同値であるから，どちらを定義に用いても変わらない．しかし，擬順序の場合では，この 2 つの概念は一般には異なる．擬順序 Q における無限列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ について，次の性質を考えよう．

$$\text{下降:}\quad j < k \implies a_j >_Q a_k \qquad\qquad \text{反上昇:}\quad j < k \implies a_j \not\leqslant_Q a_k$$

無限反上昇列は，しばしば悪列 (bad sequence) とも呼ばれる．良い擬順序の定義として，この概念を用いることにしよう．

定義 2.1. 擬順序集合 $(Q, \leqslant_Q)$ が**整擬順序** (*well-quasi-order*) あるいは **WQO** であるとは，Q が無限反上昇列を持たないことを意味する．

注意. この概念は整列擬順序と訳されることが多いが，整列という用語は混乱を招く可能性があるので，本稿では用いないこととする．実際，整列擬順序という訳は，たとえば前整列順序 (pre-well-order) という別概念の混同の恐れがある．ここで，前整列順序とは，整列順序の条件から反対称律を除いたもので，まさに整列した前順序である．したがって，整列順序や前整列順序は「整列」という訳語が意味とマッチしているが，well-quasi-order には「整列」という意味はなく，所詮「well」に過ぎない．ただ，「well」の付いた数学的用語の訳語として，たとえば「整礎 (well-founded)」など「整」という漢字が割り当てられることが多いようである．「整列している」とまで言ってしまうと意味にはそぐわないが，「整っている」程度であれば問題ないであろう．

反上昇列の例を挙げておくと，たとえば，下降列や反鎖などがある．ここで，擬順序集合 $(Q, \leqslant_Q)$ の部分集合 S が**反鎖** (*antichain*) であるとは，任意の $p, q \in S$ について，$p \nleqslant_Q q$ かつ $q \nleqslant_Q p$ であることを意味する．この場合，しばしば $p \perp_Q q$ と書く．後で証明を与えるが，無限反上昇列を持たないことと，無限下降列または無限反鎖を持たないことは同値である．つまり，$(Q, \leqslant_Q)$ が整列擬順序であることと以下の条件は同値である．

WQO2:　Q は無限下降列も無限反鎖も持たない擬順序である．

ここからは，整擬順序の様々な特徴付けを見ていこう．その前に，整列順序についても，他にも色々な同値な特徴付けが知られていることを思い出そう．たとえば，整列順序は，以下のように定義されることも多い．

整列順序とは，任意の部分集合が最小元を持つような全順序である．

この性質は，全順序 $(L, \leqslant_L)$ の任意の部分集合 $S \subseteq L$ が 1 つの元 $a \in S$ を下界に持つと言い表せる．全順序の場合だと 1 つの元でよいが，擬順序の場合は，1 つの元ではさすがに条件が厳しすぎる．したがって，有限個の元 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ を下界に持つ，という条件に緩めたい．つまり，擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ に関する次の性質を考える．

$$\text{WQO3:}\quad (\forall S \subseteq Q)(\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in S)(\forall x \in S)\ [a_1 \leqslant_Q x \text{ or } \ldots \text{ or } a_n \leqslant_Q x]$$

記号を使って表そう．擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ の部分集合 S に対して，$\uparrow S = \{x \in Q : (\exists a \in S)\ a \leqslant_Q x\}$ と定義する．この記法を用いれば，以下が成り立つことは容易に分かる．

$$\begin{aligned}
L \text{ が整列順序} &\iff (\forall S \subseteq L)(\exists a \in S) \quad S \subseteq \uparrow\{a\}. \\
Q \text{ が整擬順序} &\iff (\forall S \subseteq Q)(\exists a_1, \ldots, a_n \in S) \quad S \subseteq \uparrow\{a_1, \ldots, a_n\}.
\end{aligned}$$

したがって，整列順序は上方閉集合が単元生成であり，整擬順序は上方閉集合が有限生成であるもののことである．ここで，$S \subseteq Q$ が上方閉 (upward closed) とは，$S = \uparrow S$ となることである．言い換えれば，任意の $s \in S$ に対して，$s \leqslant_Q x$ ならば $x \in S$ となることを意味する．同様に，$S \subseteq Q$ が下方閉 (downward closed) とは，任意の $s \in S$ に対して，$x \leqslant_Q s$ ならば $x \in S$ となることを意味する．いま，下方閉集合 $D \subseteq Q$ が禁止元 $a_1, \ldots, a_n$ によって決定されるとは，以下を満たすことを指す．

$$\text{WQO3}':\quad (\forall x \in Q)\ [x \in D \iff a_1 \nleqslant x \text{ and } \ldots \text{ and } a_n \nleqslant x]$$

明らかに，上記の性質 WQO3 は，任意の下方閉集合 $S \subseteq Q$ が有限個の禁止元によって決定されるという性質 WQO3$'$ と同値である．この性質は，グラフマイナー理論などの文脈ではしばしば用いられる．それでは，整列擬順序に関する様々な性質の同値性の証明を与えよう．

命題 2.2. 擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ に対して，以下の条件は同値である．

1. *WQO:* Q は無限反上昇列を持たない．
2. *WQO2:* Q は無限下降列も無限反鎖も持たない．
3. *WQO3:* Q の任意の上方閉集合は有限生成である．
4. *WQO3′:* Q の任意の下方閉集合は有限個の禁止元によって決定される．

Proof. (1)⇒(2): 無限下降列も無限反鎖も無限反上昇列の一種なので明らかである．

(2)⇒(3): まず，任意の $S \subseteq Q$ は，極小元を持つ．つまり，

$$(\exists x \in S)(\forall y <_Q x)\ y \notin S$$

が成り立つ．なぜなら，さもなくば，従属選択公理によって，S の中で無限下降列が取れるため，仮定 (2) に反する．それでは，いま部分集合 $U \subseteq Q$ が与えられているとする．まず U の極小元 a_0 を選び，次に $U \setminus \uparrow\{a_0\}$ の極小元 a_1 を選び，次に $U \setminus \uparrow\{a_0, a_1\}$ の極小元を選ぶ，というプロセスを続けていこう．ただし，$U \setminus \uparrow\{a_0, \dots, a_n\} = \varnothing$ すなわち $U \subseteq \uparrow\{a_0, \dots, a_n\}$ となったらこのプロセスを終了することとする．各 $j < k$ について，$a_k \notin \uparrow\{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ なので，$a_j \not\leqslant_Q a_k$ である．さらに，各 a_j は極小元であるから，$a_k \not\leqslant_Q a_j$ であることも分かる．したがって，$\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ は反鎖である．もしこのプロセスが終了しない場合，従属選択公理によって，無限反鎖 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ を得るが，これは仮定 (2) に反する．したがって，有限個の元 $a_0, \dots, a_n \in U$ が存在して，$U \subseteq \uparrow\{a_0, \dots, a_n\}$ となる．

(3)⇒(1): Q の無限列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられているとする．このとき，仮定 (3) より，有限個の元 $a_{j(0)} < \cdots < a_{j(k)}$ が存在して，$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \uparrow\{a_{j(0)}, \dots, a_{j(k)}\}$ となる．特に $a_{j(k)+1} \in \uparrow\{a_{j(0)}, \dots, a_{j(k)}\}$ であるから，ある $m \leqslant k$ が存在して，$a_{j(m)} \leqslant_Q a_{j(k)+1}$ となる．したがって，$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は反上昇列ではない．

(3)⇔(4): 上方閉集合の補集合は下方閉集合であることから明らかである． □

2.2. 無限ラムゼーの定理とその応用

ところで，**ラムゼーの定理** (*Ramsey's theorem*) と呼ばれるものがある．最も単純なケースでは，人間が 6 人集まれば「知り合い同士であるような 3 人」あるいは「互いに知り合いでない 3 人」のどちらかは必ず存在する，というものである．あるいは，人々が星空の中に星座という形状を見出してきた，というのもラムゼー理論の心を表す．スローガン的には，これは

十分に巨大な構造の中には必ず秩序がある

と説明されることがある．ただ，この十分に巨大というのが本当に巨大でなければならないことが多い．

さて，ラムゼーの定理の最初の例のように，集団 X の各ペアを複数の属性に分割しよう．つまり，たとえば各ペアに対して「知り合いである」「知り合いでない」という属性を付けるような感じである．集合 X の大きな n の部分集合全体を $[X]^n$ と表すことにすれば，ペアへの属性付けは，関数 $c\colon [X]^2 \to E$ を指定することと同等である．本稿で用いるものは，「知り合いである」「知り合いでない」というような二択の設定でよいので，関数 $c\colon [X]^2 \to \{0,1\}$ を考える．最初の例であれば，X が 6 以上の要素を含むならば，3 以上の要素を含む $Y \subseteq X$ が存在して，Y に属すペアはいずれも同じ属性である．つまり，以下が成立している．

$$(\exists i \in \{0,1\})(\forall x, y \in Y)\ c(\{x,y\}) = i. \tag{1}$$

さて，本稿で用いるものは，無限ラムゼーの定理というものである．無限に大きい構造には無限に大きな秩序がある．もし X が無限集合ならば，上記のような $Y \subseteq X$ を無限集合として取ることができる，という主張である．形式的には，

定理 2.3 (無限ラムゼーの定理)**.** X が無限集合ならば，任意の関数 $c\colon [X]^2 \to \{0,1\}$ について，ある無限集合 $Y \subseteq X$ が存在して，式 *(1)* が成立する．

この定理は，もともとフランク・ラムゼー (Frank P. Ramsey) が形式論理学の研究の中で証明した主張である．ラムゼーは，数学基礎論におけるヒルベルト-アッカーマンの決定問題を解くことを目指しており，特定の形の論理式に対しては恒真性の判定が可能であることを示す際に用いた補題がこのラムゼーの定理である．ラムゼーの定理の応用として，命題 2.2 の (2)⇒(1) の別証明を与えてみよう．

Proof (命題 2.2 の (2)⇒(1)). Q は無限反上昇列 $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つと仮定する．いま，$n < m$ について，以下のようにペアに属性 $c\colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$ を与える．

$$c(\{n,m\}) = 1 \iff q_n \geqslant_Q q_m.$$

このとき，無限ラムゼーの定理より，ある無限集合 $I \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，I に属す番号のペアは等しい属性を持つ．もし，c の I 上の値が 1 であれば，c の定義と $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が悪列であるという条件より，

$$(n, m \in I \text{ and } n < m) \implies (q_n \geqslant_Q q_m \text{ and } q_n \nleqslant_Q q_m) \iff q_n >_Q q_m$$

であるから，$\{q_n\}_{n\in I}$ は無限下降列を与える．もし，c の I 上の値が 0 であれば，c の定義と $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が悪列であるという条件より，

$$(n, m \in I \text{ and } n < m) \implies (q_n \ngeqslant_Q q_m \text{ and } q_n \nleqslant_Q q_m) \iff q_n \perp_Q q_m$$

であるから，$\{q_n\}_{n\in I}$ は無限反鎖を与える．以上より，Q が無限反上昇列を持つならば，Q は無限下降列または無限反鎖を持つことが示された． □

さて，WQO とは，無限反上昇列を持たない擬順序である．つまり，どんな無限列 (q_i) が与えられても，ある $n < m$ が存在して，$q_n \leqslant_Q q_m$ となる．この性質の良いところは，$\leqslant_Q$ にしか言及しないため，WQO の定義が単調であることを明示化するという点にある．具体的には，同じ集合 X 上の擬順序 $\leqslant_P$ が擬順序 $\leqslant_Q$ より粗い，つまり

$$x \leqslant_Q y \implies x \leqslant_P y$$

という条件を満たす場合を考えよう．このとき，$q_n \leqslant_Q q_m$ ならば必ず $q_n \leqslant_P q_m$ も保証される．したがって，

$$(X, \leqslant_Q) \text{ が WQO} \implies (X, \leqslant_P) \text{ も WQO}$$

という性質が成り立つのである．WQO の別定義 (WQO2) のように，定義が無限下降列と無限反鎖に分解されていると，この性質は非自明である．ともあれ，上記の性質を利用すると，不等式理論 Q と Q' があったとき，もし Q' が Q より強いならば，

$$Q[A] \text{ が WQO} \implies Q'[A] \text{ も WQO}$$

ということも導ける．したがって，可能な限り弱い不等式理論において WQO 性を示す，ということが重要である．

無限ラムゼーの定理のもうひとつの帰結を証明しよう．

補題 2.4. 擬順序 Q が WQO ならば，Q の任意の列 $q_0, q_1, q_2, \ldots$ は広義単調増大な無限部分列を含む．つまり，増大関数 $r \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立する．

$$i \leqslant j \implies q_{r(i)} \leqslant q_{r(j)}.$$

Proof. Q の任意の列 $q_0, q_1, q_2, \ldots$ が与えられていると仮定する．いま，$n < m$ について，以下のようにペアに属性 $c \colon [\mathbb{N}]^2 \to \{0, 1\}$ を与える．

$$c(\{n, m\}) = 1 \iff q_n \leqslant_Q q_m.$$

このとき，無限ラムゼーの定理より，ある無限集合 $I \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，I に属す番号のペアは等しい属性を持つ．もし c の I 上の値が 0 であれば，

$$(n \in I \text{ and } n < m) \implies q_n \not\leqslant_Q q_m$$

であるが，I は無限集合なので，つまり，これは悪列であるような部分列を持つということである．しかし，Q は WQO であったから，悪列は持たないので，これはあり得ない．したがって，必ず c は I 上で値 1 を取るが，このとき，

$$(n \in I \text{ and } n < m) \implies q_n \leqslant_Q q_m$$

が成立している．無限集合 I の元を添字に持つ要素を順に並べていけば，これは $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の広義単調増大な無限部分列を与える． □

2.3. 極小悪列補題

さて，全順序には整礎部分 (well-founded part) という概念がある．これは全順序のうち整礎になっているギリギリ限界の部分までを取ってくる操作で，整列順序を扱う際には重要な手法である．これは，ギリギリ整礎になっていない部分を取ってくるという行為と表裏一体である．このアイデアを拡張して，擬順序に対する WQO 部分という概念も考えたい．しかし，ここで考えるものはその裏の姿で，ギリギリ WQO になっていない部分である．この概念は WQO 理論においては，極小悪列 (minimal bad sequence) という名で呼ばれる．

今後の証明の都合上，少し複雑になるが，2 つの擬順序 $\leqslant_Q, \sqsubseteq_Q$ を備えた集合 Q を考える．本稿で用いるものは，項上の何らかの順序 $\leqslant_Q$ と部分項順序 $\sqsubseteq_Q$ の組である．

定義 2.5. $\leqslant_Q, \sqsubseteq_Q$ を集合 Q 上の擬順序とする．Q 上の **$\sqsubseteq_Q$-極小 $\leqslant_Q$-反上昇列**とは，Q の $\leqslant_Q$-反上昇列

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots$$

であり，任意の $i \in \mathbb{N}$ および $t'_i \sqsubsetneq_Q t_i$ に対して，

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t'_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \dots$$

が $\leqslant_Q$-反上昇列となるような $s_{i+1}, s_{i+2}, \dots$ は存在しないことを意味する．

つまり，$\leqslant_Q$-反上昇列のうち，ある種の $\sqsubseteq_Q$-極小性を持つもの，ということである．この概念をもう少し別の視点から説明しよう．まず擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ が与えられたとき，反上昇列の木 $T_Q^{\mathrm{bad}} \subseteq Q^*$ を以下によって定義する．

$$T_Q^{\mathrm{bad}} = \{a_0 a_1 \dots a_n \in Q^* : (a_i)_{i=0}^n \text{ は } \leqslant_Q\text{-反上昇列 }\}.$$

木 T の**無限パス** (*infinite path*) とは，無限列 $(a_i)_{i=0}^\infty$ であり，任意の n について $(a_i)_{i=0}^n \in T$ となるものである．明らかに T_Q^{bad} の無限パスは $\leqslant_Q$-反上昇列である．したがって，もし $\leqslant_Q$ が WQO ならば，T_Q^{bad} は無限パスを持たない．

いま，Q はまた別の擬順序 $\sqsubseteq_Q$ を備えているとする．このとき，$Q^{\mathbb{N}}$ 上の $\sqsubseteq_Q$-辞書式順序を次によって定義する．

$$(a_i)_{i=0}^\infty \sqsubseteq_Q^{\mathrm{lex}} (b_i)_{i=0}^\infty \iff \begin{cases} (\forall n)\ a_n \equiv_Q b_n \text{ or} \\ (\exists n)\ [(\forall m < n)\ a_m \equiv_Q b_m \text{ and } a_n \prec_Q b_n] \end{cases}$$

このとき，木 $T \subseteq Q^*$ の **$\sqsubseteq_Q$-極小パス**とは，T の無限パスのうち $\sqsubseteq_Q^{\mathrm{lex}}$-極小であるものを指す．特に木 T_Q^{bad} の $\sqsubseteq_Q$-極小パスのことを $\sqsubseteq_Q$-極小 $\leqslant_Q$-反上昇列と呼ぶ．

以下，擬順序 $(Q, \sqsubseteq)$ が整礎 (well-founded) であるとは，Q の $\sqsubseteq$-無限下降列が存在しないこととする．このとき，特に任意の空でない部分集合 $S \subseteq Q$ は極小元を持つ．

補題 2.6 (極小悪列補題)**.** $\sqsubseteq_Q$ を集合 Q 上の整礎半順序とする．もし Q 上の木 $T \subseteq Q^*$ が無限パスを持つならば，T は $\sqsubseteq_Q$-極小パスを持つ．

Proof. 無限パス $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に構成する．いま，$T(a_0 \dots a_k)$ を $a_0 \dots a_k$ を拡張する T の無限パス全体の集合とする．つまり，

$$T(a_0 \dots a_k) = \{(b_n)_{n=0}^{\infty} : (\forall i < k)\ a_i = b_i \text{ and } (\forall n)\ b_n \in T\}$$

とする．まず, T が無限パスを持つという仮定より, 空列は無限パスへと拡張可能である．帰納的に $a_0 a_1 \dots a_k \in T$ で無限パスへと拡張可能なものを構成していると仮定する．つまり, $T(a_0 a_1 \dots a_k)$ は空でない．いま，$(b_n)_{n=0}^{\infty} \in T(a_0 a_1 \dots a_k)$ とすると，

$$Q_{k+1} := \{b \in Q : T(a_0 a_1 \dots a_k b) \neq \varnothing\}$$

について，$b_{k+1} \in Q_{k+1}$ である．よって，$\sqsubseteq_Q$ の整礎性より，Q_{k+1} は $\sqsubseteq_Q$-極小元 a_{k+1} を持つ．

この構成を繰り返して得た列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が T の $\sqsubseteq_Q$-極小パスであることを確認しよう．もし $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が $\sqsubseteq_Q$-極小でないならば，T のある無限パス $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ について，$(b_n)_{n=0}^{\infty} \sqsubsetneq_Q^{\text{lex}} (a_n)_{n=0}^{\infty}$ となるものが存在する．よって，ある n について，$a_{n+1}, b_{n+1} \in Q_{n+1}$ かつ $b_{n+1} \sqsubsetneq_Q a_{n+1}$ が成立する．しかし，これは a_{n+1} の $\sqsubseteq_Q$-極小性に反する．したがって，$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ が T の $\sqsubseteq_Q$-極小パスであることが導かれた． □

ちなみに補題 2.6 は，整礎半順序だけでなく整礎擬順序に対しても成立する．木 $T = T_Q^{\text{bad}}$ を考えれば，Q が WQO でない，つまり $\leqslant_Q$-反上昇列を持つならば $\sqsubseteq_Q$-極小 $\leqslant_Q$-反上昇列を持つことが導かれる．

系 2.7. 集合 Q について，$\leqslant_Q$ が Q 上の整擬順序で，$\sqsubseteq_Q$ が Q 上の整礎擬順序ならば，$\sqsubseteq_Q$-極小 $\leqslant_Q$-反上昇列が存在する．

本稿では，$\sqsubseteq_Q$ として主に部分項順序を考える．どんな項も有限個の部分項しか持たないから，特に整礎半順序である．しかし，次の補題を示すためには，整礎半順序というだけでは不足で，部分項順序のように，有限個の部分項しか持たないというような強力な有限性が必要である．

定義 2.8. 擬順序 $(Q, \sqsubseteq_Q)$ が**局所有限** (*locally finite*) であるとは，任意の $q \in Q$ に対して，$\{p \in Q : p \sqsubseteq_Q q\}$ が有限であることを意味する．

さて，2 つの擬順序 $\leqslant_Q$ と $\sqsubseteq_Q$ を備えている集合 Q を考えたいのだが，これら 2 つの擬順序が全く無関係であったらあまり役には立たない．

定義 2.9. Q 上の擬順序 $\leqslant_Q$ **が** $\sqsubseteq_Q$ **を拡張する**とは，次の性質を満たすことである．

$$(\forall p, q \in Q)\ p \sqsubseteq_Q q \implies p \leqslant_Q q.$$

しばしば $\leqslant_Q$ が $\sqsubseteq_Q$ より細かい，あるいは $\sqsubseteq_Q$ が $\leqslant_Q$ より粗い，とも言われる．

粗い局所有限擬順序 $\sqsubseteq_Q$ を備えた擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ については，以下のように，$\sqsubseteq_Q$-極小反上昇列を用いて $\leqslant_Q$ の WQO 部分を抽出することができる．いま，Q の無限列 $\bar{q} = (q_n)_{n=0}^{\infty}$ に対して，以下の記法を用いる．

$$Q(\sqsubsetneq_Q \bar{q}) = \{p \in Q : (\exists n)\ p \sqsubsetneq_Q q_n\}.$$

補題 2.10. 擬順序 $(Q, \leqslant_Q)$ が局所有限擬順序 $(Q, \sqsubseteq_Q)$ を拡張しているとする．もし $\bar{q} = (q_n)_{n=0}^{\infty}$ が $\sqsubseteq_Q$-極小 $\leqslant_Q$-反上昇列ならば，$(Q(\sqsubsetneq_Q \bar{q}), \leqslant_Q)$ は WQO である．

Proof. そうでないと仮定する．このとき，$Q(\sqsubsetneq_Q \bar{q})$ の $\leqslant_Q$-反上昇列 $u_0, u_1, u_2, \dots$ が存在する．定義より，任意の n に対して，ある $k(n)$ が存在して，$u_n \sqsubsetneq_Q q_{k(n)}$ である．$\sqsubseteq_Q$ の局所有限性より，$\{u \sqsubseteq_Q q_j : j \leqslant k(0)\}$ は有限なので，有限個を除く u_i は，この集合に属さない．つまり，ある ℓ について，$\{u_n\}_{n=\ell}^{\infty} \cap \{u \sqsubseteq_Q q_j : j \leqslant k(0)\} = \varnothing$ である．したがって，$n \geqslant \ell$ ならば，もし $u_n \sqsubseteq_Q q_j$ ならば $j > k(0)$ である．特に $k(n) > k(0)$ を得る．いま，

$$\bar{p} := (q_0, q_1, \dots, q_{k(0)-1}, u_0, u_\ell, u_{\ell+1}, \dots)$$

という列を考えると，これは $\leqslant_Q$-反上昇列である．なぜなら，$i < j$ ならば $q_i \not\leqslant_Q q_j$ かつ $u_i \not\leqslant_Q u_j$ である．さらに，任意の $m < k(0)$ と $n \geqslant \ell$ に対して，$m < k(0) < k(n)$ であることから，$q_m \not\leqslant_Q q_{k(0)}, q_{k(n)}$ である．また，$\leqslant_Q$ は $\sqsubseteq_Q$ を拡張するから，$u_n \sqsubseteq_Q q_{k(n)}$ は $u_n \leqslant_Q q_{k(n)}$ を導くので，$q_m \not\leqslant_Q u_0, u_n$ を得る．よって，$\bar{p}$ が $\leqslant_Q$-反上昇列であることが導かれた．しかし，$u_0 \sqsubsetneq_Q q_{k(0)}$ より，$\bar{p} \sqsubsetneq_Q^{\mathrm{lex}} \bar{q}$ であり，$\bar{q}$ の $\sqsubseteq$-極小性より，$\bar{p}$ は $\leqslant_Q$-反上昇列ではないはずである． □

§ 3. 整擬順序の保存定理

WQO 理論の主結果は，既に知っている WQO をタネにして，新たな擬順序を生成しても，まだ WQO であることが保たれる，という形式の定理群である．つまり，様々な構成 Q について，

$$A \text{ は WQO} \implies Q(A) \text{ は WQO}$$

という形式の定理が成立する．この種の定理の代表的な例が，ディクソンの補題，ヒグマンの補題，クラスカルの木の定理である．

3.1. 語，木，項

ここから，語や木上の順序を扱うが，語や木といった概念は，ある代数的な側面をもち，その観点が，順序理論的な性質の証明に有用である．普遍代数学や数理論理学では，定数記号と関数記号たちの集合をシグネチャ (signature) と呼ぶ．しばしば定数記号は 0 変数関数記号として扱われる．たとえば，定数記号 $0, 1$ と 2 変数関数記号 $+, \times$ の集合 $\{0, 1, +, \times\}$ はシグネチャである．シグネチャあるところに項の概念がある．本稿では，自由変数を持たない項，すなわち閉項のみを取り扱う．

定義 3.1. $\mathcal{L}$ をシグネチャとする．**$\mathcal{L}$-閉項** ($\mathcal{L}$-*closed term*) の概念は以下のように帰納的に定義される．

1. 定数記号 $c \in \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$-閉項である．
2. n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は $\mathcal{L}$-閉項である．

例 3.2. 2 変数関数記号 $*$ に対して，$*(a, b)$ はしばしば $a * b$ と略記される．この略記の下で，$(1 + 1) \times (0 + (1 \times 1))$ は $\{0, 1, +, \times\}$-閉項である．

例 3.3. 各素数 $p \in \mathsf{Prime}$ と 1 を定数記号とし，積 $\times$ を 2 変数関数記号として持つシグネチャ $\mathcal{L}_{\mathsf{P}} = \{1, p, \times\}_{p \in \mathsf{Prime}}$ を考える．このとき，任意の正整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ は，$\mathcal{L}_{\mathsf{P}}$-閉項として表せる．

注意 (語のシグネチャ)**.** 2 変数関数記号 $*$ が結合律 $(a * b) * c = a * (b * c)$ を満たすときには，括弧を省略して，$a * b * c$ として表すことができる．したがって，集合 A の各元を定数記号とし，結合律を満たす 2 変数関数記号 $*$ を持つシグネチャ $\mathcal{L}_A = \{a, *\}_{a \in A}$ における閉項は，常に括弧を省略して，以下のように表すことができる．

$$a_1 * a_2 * \cdots * a_\ell, \qquad \text{（ここで，任意の } i \leqslant \ell \text{ について } a_i \in A \text{ である）}$$

さらに $*$ を省略すれば，$\mathcal{L}_A$-閉項は正確に A 上の語を表すことが分かる．

代数学の用語を用いれば，上記の注意は，語が自由モノイド (free monoid) の元として扱えるこ

とを意味する．ただし，この方法で語を形式的に取り扱おうとすると，結合律という余分なステップが必要になる．今後，複雑な定理を示す際に，この余分なステップによって，証明の見通しが少し悪くなってしまう．そこで，結合律を介さずに，語を形式的に取り扱うためのシグネチャを導入しよう．

例 3.4 (語のシグネチャ)**.** 与えられた集合 A に対して，一つの定数記号 ε と任意個の一変数関数記号 $(\varphi_a)_{a\in A}$ からなるシグネチャ $\mathcal{W}_A = \{\varepsilon, \varphi_a\}_{a\in A}$ を考える．このとき，各 $\mathcal{W}_A$-閉項 t は以下のようにして A 上の語 $[t]$ を表す．

$$[\varepsilon] = \text{“空語”} \qquad\qquad [\varphi_a(t)] = a * [t]$$

もう少し具体的に書けば，$\mathcal{W}_A$-閉項と $\mathcal{L}_A$-閉項を以下のように同一視するということである．

$$\varphi_{a_1}(\varphi_{a_2}(\dots\varphi_{a_\ell}(\varepsilon))) \quad \approx \quad a_1 * a_2 * \dots * a_\ell.$$

この観点を用いると，語と木の関係性が明瞭になる．つまり，語は 1 変数関数記号たちから生成されるが，木は多変数関数記号たちから生成される．

例 3.5 (木のシグネチャ)**.** 与えられた集合 A に対して，一つの定数記号 ε と各 $a \in A$ と $n \in \mathbb{N}$ 毎に n 変数関数記号 ψ_a^n を用意し，これらからなるシグネチャ $\mathcal{T}_A = \{\varepsilon, \psi_a^n\}_{a\in A, n\in\mathbb{N}}$ を考える．このとき，各 $\mathcal{T}_A$-閉項は以下のようにして A ラベル付き根付き木を表す．

1. $[\varepsilon]$ は空木を表す．
2. $[\psi_a^n(t_1,\dots,t_n)]$ は，木 $[t_1],\dots,[t_n]$ をラベル a の根で束ねたものである．つまり，ラベル a の根 ρ を追加し，ρ から各木 $[t_i]$ の根 ρ_i への有向辺を加えたものである．

以後はしばしば ψ_a^n のことを ψ_a と略記し，ψ_a が任意有限個の項を入力として受け付けるものと考える．

我々は閉項上の様々な順序を取り扱うが，その最も基本的なものは部分項関係である．

定義 3.6. $\mathcal{L}$-閉項の間の部分項関係 $\sqsubseteq_{\mathcal{L}}$ を以下によって定義する．

1. (反射律) $t \sqsubseteq_{\mathcal{L}} t$ である．
2. (推移律) $s \sqsubseteq_{\mathcal{L}} t$ かつ $t \sqsubseteq_{\mathcal{L}} u$ ならば $s \sqsubseteq_{\mathcal{L}} u$ である．
3. (部分項関係) n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $t_1,\dots,t_n$ に対して，以下が成立する．

$$t_1,\dots,t_n \sqsubseteq_{\mathcal{L}} f(t_1,\dots,t_n)$$

関係 $s \sqsubseteq_{\mathcal{L}} t$ が成り立つとき，s は t の**部分項** (*subterm*) であるという．

部分項関係の優れた性質は，たとえ無限項演算 $\sum, \prod, \bigcup, \bigcap$ 等を扱っていたとしても，整礎性を

満たすという点であり，これによって，項上の帰納法が可能になる．ただし，本稿では，部分項関係だけではなく，その拡張も扱う．

定義 3.7. シグネチャ $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号の間に擬順序 $\leqslant_n$ が定義されているとき，$(\mathcal{L}, \leqslant_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を**順序シグネチャ**と呼ぶことにする．

例 3.8 (語の順序シグネチャ)**.** A を擬順序集合とする．このとき，シグネチャ $\mathcal{W}_A = \{\varepsilon, \varphi_a\}_{a\in A}$ 上の擬順序 $\leqslant_0, \leqslant_1$ を以下によって定義する．まず，$\varepsilon \leqslant_0 \varepsilon$ とし，また，$\varphi_a \leqslant_1 \varphi_b$ を $a \leqslant_A b$ によって定義する．このとき，$(\mathcal{W}_A, \leqslant_0, \leqslant_1)$ は順序シグネチャである．

定義 3.9. $(\mathcal{L}, \leqslant_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を順序シグネチャとする．このとき，$\mathcal{L}$-閉項上の擬順序 $\leqslant_{\mathcal{L}}$ が**項順序**であるとは，以下の条件を満たすこととする．

1. (部分項関係) 任意の n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，

$$t_1, \ldots, t_n \leqslant_{\mathcal{L}} f(t_1, \ldots, t_n).$$

2. (順序保存) 任意の n 変数関数記号 $f, g \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ に対して，

$$f \leqslant_n g \;\&\; (\forall i \leqslant n)\ s_i \leqslant_{\mathcal{L}} t_i \implies f(s_1, \ldots, s_n) \leqslant_{\mathcal{L}} g(t_1, \ldots, t_n).$$

条件 (1) は，$s \sqsubseteq_{\mathcal{L}} t$ ならば $s \leqslant_{\mathcal{L}} t$ であることを保証している．

例 3.10 (整除順序)**.** 例 3.3 のシグネチャ $\mathcal{L}_{\mathsf{P}}$ に以下の順序を入れる．

$$(\forall p, q \in \mathsf{Prime})\ 1 \leqslant_0 p,\quad p \nleqslant_0 q,\quad q \nleqslant_0 p.$$

このとき，$\mathbb{Z}_{>0}$ 上の整除関係 $\leqslant_{\mathrm{div}}$ は，$\mathcal{L}_{\mathsf{P}}$ 上の項順序である．

3.2. ヒグマンの補題

まずは，語上の順序から議論しよう．A 上の語をシグネチャ $\mathcal{W}_A$ の閉項として表せば，A^* 上の項順序 $\leqslant_H$ とは，以下の性質を満たすものであった．

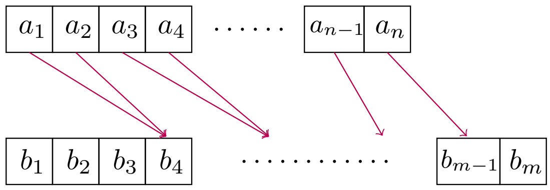
1. (部分項順序) 任意の閉項 t に対して，$t \leqslant_H \varphi_a(t)$ である．
2. (順序保存) $a \leqslant_A b$ かつ $s \leqslant_H t$ ならば，$\varphi_a(s) \leqslant_H \varphi_b(t)$ である．

以下，$\varphi_a(t)$ のことを $a * t$ または単に at と書くことにする．

例 3.11 (語の準同型順序)**.** 擬順序集合 A 上の語 $\bar{a} = a_1 \ldots a_n$ と $\bar{b} = b_1 \ldots b_m$ に対して，準同型

順序 $\bar{a} \leqslant_{\mathrm{hom}} \bar{b}$ を以下によって定義する．

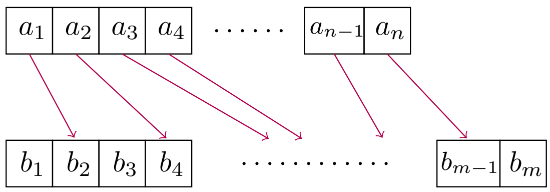
$$a \leqslant_{\mathrm{hom}} b \iff \text{ある単調写像 } h\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \text{ が存在して，}$$
$$\text{任意の } i \leqslant n \text{ について，} a_i \leqslant_A b_{h(i)} \text{ が成立する．}$$



ここで，h が単調であるとは，$i \leqslant j$ ならば $h(i) \leqslant h(j)$ であることを意味する．この準同型順序 $\leqslant_{\mathrm{hom}}$ は A^* 上の項順序である．

例 3.12. 擬順序集合 A 上の語 $\bar{a} = a_1 \dots a_n$ と $\bar{b} = b_1 \dots b_m$ に対して，埋め込み順序 $\bar{a} \leqslant_{\mathrm{emb}} \bar{b}$ を以下によって定義する．

$$a \leqslant_{\mathrm{emb}} b \iff \text{ある単射単調写像 } h\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \text{ が存在して，}$$
$$\text{任意の } i \leqslant n \text{ について，} a_i \leqslant_A b_{h(i)} \text{ が成立する．}$$



この埋め込み順序 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は A^* 上の項順序である．

明らかに $\bar{a} \leqslant_{\mathrm{emb}} \bar{b}$ ならば $\bar{a} \leqslant_{\mathrm{hom}} \bar{b}$ である．つまり，埋め込み順序の方が細かい順序である．実は，埋め込み順序は，語上の項順序の中で最も細かいことを示すことができる．

命題 3.13. 語の埋め込み順序 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ は，語上の最小の項順序である．

Proof. 埋め込み順序 $\leqslant_{\mathrm{emb}}$ が項順序であることは明らかなので，最小性のみ示す．語 $\bar{a} = a_1 \dots a_\ell$ と $\bar{b} = b_1 \dots b_m$ に対して，$\bar{a} \leqslant_{\mathrm{emb}} \bar{b}$ が成立していると仮定する．つまり，ある単調単射 h が存在して，任意の i について $a_i \leqslant_A b_{f(i)}$ が成立している．このとき，任意の項順序 $\leqslant_H$ に対して，$\bar{a} \leqslant_H \bar{b}$ も成立していることを示したい．

帰納法により，任意の $i \leqslant \ell$ に対して，$a_i \dots a_\ell \leqslant_H b_{h(i-1)+1} \dots b_m$ を示す．ここで，$h(0) = 0$ とおく．まず，$i = \ell$ のとき，ε は任意の項の部分項なので，$\varepsilon \sqsubseteq b_{h(\ell)+1} \dots b_m$ が成立する．項順序は部分項関係 $\sqsubseteq$ を拡張するから，$\sqsubseteq$ は $\leqslant_H$ に置き換えてよい．仮定 $a_\ell \leqslant_A b_{h(\ell)}$ と項順序の順序保存性を組み合わせて，

$$a_\ell = a_\ell * \varepsilon \leqslant_H b_{h(\ell)} b_{h(\ell)+1} \dots b_m \sqsubseteq b_{h(\ell-1)+1} \dots b_m$$

を得る．ここで，h が単調単射であるから，$h(\ell-1)+1 \leqslant h(\ell)$ であり，後者の部分項関係を得ている．再び部分項関係 $\sqsubseteq$ は $\leqslant_H$ に置き換えて，帰納法の基礎ステップを得た．

$i=k+1$ に対して目的の式が成立している，つまり $a_{k+1}\dots a_\ell \leqslant_H b_{h(k)+1}\dots b_m$ を仮定する．仮定 $a_k \leqslant_A b_{h(k)}$ と項順序の順序保存性を組み合わせて，先程と同様の理由によって，

$$a_k a_{k+1}\dots a_\ell \leqslant_H b_{h(k)} b_{h(k)+1}\dots b_m \sqsubseteq b_{h(k-1)+1}\dots b_m$$

を得る．部分項関係 $\sqsubseteq$ は $\leqslant_H$ に置き換えて，目的の式を得られる．$i=1$ とすれば，$\bar{a} \leqslant_H \bar{b}$ が導かれる． $\square$

定理 3.14 (ヒグマンの補題)**.** $\leqslant_A$ を集合 A 上の擬順序，$\leqslant_H$ を A^* 上の項順序とする．このとき，以下の性質が成り立つ．

$$(A, \leqslant_A) \text{ は WQO} \Longrightarrow (A^*, \leqslant_H) \text{ は WQO.}$$

Proof. A は WQO であるが，A^* は WQO でないと仮定する．極小悪列補題 (系 2.7) より，A^* は $\sqsubseteq$-極小 $\leqslant$-反上昇列 $t_0, t_1, t_2, \dots$ を持つ．空語 ε は $\sqsubseteq$-最小元であるから，$t_i = \varepsilon$ となることはあり得ない．したがって，$t_i = a_i * t'_i$ と分解できる．ただし，t'_i は空語であり得る．

このとき，$a_0, a_1, a_2, \dots$ は A の列であるが，A は WQO だったので，補題 2.4 より，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増大な無限部分列 $(a_{r(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ を含む．このとき，

$$t_0, t_1, \dots, t_{r(0)-1}, t'_{r(0)}, t'_{r(1)}, t'_{r(2)}, \dots$$

を考えると，$t'_{r(0)}$ は $t_{r(0)}$ の部分項，つまり $t'_{r(0)} \sqsubsetneq t_{r(0)}$ であるから，$t_0, t_1, \dots$ の $\sqsubseteq$-極小性より，この列は $\leqslant$-反上昇列ではない．したがって，ある $i<j$ について，i 番目の要素から j 番目の要素への順序関係を成立させる．これについて，3 つのパターンがある．

1. $i<j<r(0)$ の場合: このとき $t_i \leqslant t_j$ であるが，これは $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が反上昇列でなかったことを導き，矛盾する．
2. $i<r(0)\leqslant j$ の場合: このとき，$t_i \leqslant t'_{r(k)}$ となるが，

$$t_i \leqslant t'_{r(k)} \sqsubseteq a_{r(k)} * t'_{r(k)} = t_{r(k)}$$

であり，$\leqslant$ は $\sqsubseteq$ を拡張するので，$t_i \leqslant t_{r(k)}$ を得る．しかし，$i<r(k)$ かつ $t_i \leqslant t_{r(k)}$ ということは，$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が反上昇列でなかったことを導き，矛盾する．
3. $r(0)\leqslant i<j$ の場合: このとき，ある $k<\ell$ について $t'_{r(k)} \leqslant t'_{r(\ell)}$ となっているが，いま $a_{r(k)} \leqslant a_{r(\ell)}$ であったから，順序保存性より，

$$t_{r(k)} = a_{r(k)} * t'_{r(k)} \leqslant a_{r(\ell)} * t'_{r(\ell)} = t_{r(\ell)}$$

を得る．このとき，$r(k)<r(\ell)$ かつ $t_{r(k)} \leqslant t_{r(k)}$ なので，$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が反上昇列でなかったことを導き，矛盾する．

以上より，いずれにせよ矛盾を導くので，A^* が WQO でないという仮定が誤っていた．つまり，A が WQO ならば A^* も WQO である． □

3.3. クラスカルの木の定理

それでは，本題の木に関する順序について議論する．関数記号の項数が大きいので，木の方が語よりも厄介である項順序は，項数の等しい関数記号の比較しか行わないため，木の文脈では ψ_a^n, ψ_b^n のように分岐数が等しい場合しか順序判定が行われないこととなってしまうが，これは木の比較としては不適当である．

木を適切に比較するためには，任意有限項関数記号 ψ_a を対等に扱いたい．つまり，項数の異なる $\psi_a(s_1, \ldots, s_m)$ と $\psi_b(t_1, \ldots, t_n)$ の順序比較を行う方法が必要である．このために，まず，順序シグネチャの定義を拡張し，項数の異なる関数記号も比較できるようにしよう．以後は，擬順序 $\leqslant$ を備えたシグネチャ $\mathcal{L}$ のことを順序シグネチャと呼ぶことにする．

例 3.15 (木の順序シグネチャ)**.** A を擬順序集合とする．このとき，シグネチャ $\mathcal{T}_A = \{\varepsilon, \psi_a^n\}_{a \in A, n \in \mathbb{N}}$ 上の擬順序 $\leqslant$ を以下によって定義する．任意の a, n に対して $\varepsilon \leqslant \psi_a^n$ であり，また，$\psi_a^n \leqslant \psi_b^n$ を $a \leqslant_A b$ によって定義する．このとき，$(\mathcal{T}_A, \leqslant)$ は順序シグネチャである．

定義 3.16. $(\mathcal{L}, \leqslant)$ を順序シグネチャとする．このとき，$\mathcal{L}$-閉項上の擬順序 $\leqslant_{\mathcal{L}}$ が**クラスカル項順序**であるとは，ある $\mathcal{L}$-閉項上の語上の項順序 $\leqslant_{\mathcal{L}}^*$ が存在して，以下の条件を満たすこととする．

1. (部分項関係) 任意の n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，
$$t_1, \ldots, t_n \leqslant_{\mathcal{L}} f(t_1, \ldots, t_n).$$
2. (順序保存) 任意の関数記号 $f, g \in \mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-閉項 $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n$ に対して，
$$f \leqslant g \ \ \& \ \ s_1 \ldots s_m \leqslant_{\mathcal{L}}^* t_1 \ldots t_n \implies f(s_1, \ldots, s_m) \leqslant_{\mathcal{L}} g(t_1, \ldots, t_n).$$

命題 3.13 より，語上の項順序 $\leqslant_{\mathcal{L}}^*$ として，埋め込み順序のみを考えれば十分である．木の順序シグネチャ $\mathcal{T}_A$ の場合，$\leqslant_K$ がクラスカル項順序であるとは，$\mathcal{T}_A$-閉項上の語上のある項順序 $\leqslant_H$ が存在して，以下の条件を満たすことである．

1. (部分項順序) 任意の閉項 $t_1, \ldots, t_n$ に対して，$t_1, \ldots, t_n \leqslant_K \psi_a^n(t_1, \ldots, t_n)$ である．
2. (順序保存) $a \leqslant_A b$ かつ $s_1 \ldots s_m \leqslant_H t_1 \ldots t_n$ ならば，$\psi_a^m(s_1, \ldots, s_m) \leqslant_K \psi_b^n(t_1, \ldots, t_n)$ である．

例 3.17 (木の準同型順序)**.** $\mathcal{T}_A$-閉項は，最小元を持つ局所線形な半順序集合 $(|T|, \preceq_T)$ とラベル関数 $\ell_T \colon |T| \to A$ の組として表せる．いま，A-ラベル木 $S = (|S|, \preceq_S, \ell_S), T = (|T|, \preceq_T, \ell_T)$ につ

いて，写像 $h\colon |S| \to |T|$ が S から T への**準同型** (*homomorphism*) とは，以下の条件を満たすことである．

$$\sigma \preceq_S \tau \implies h(\sigma) \preceq_T h(\tau),$$
$$\ell_S(\sigma) \leqslant_A \ell_T(h(\sigma)).$$

もし S から T への準同型が存在するならば，$S \leqslant_{\mathrm{hom}} T$ と書く．このとき，$\leqslant_{\mathrm{hom}}$ はクラスカル項順序である．

木の準同型順序は，可算全順序の埋め込み擬順序の整礎性に関する Fraïsse 予想の分析，数列空間のボレル分割の位相複雑性の分析などに現れる．

定理 3.18 (クラスカルの木の定理)**.** $\leqslant_A$ を集合 A 上の擬順序，$\leqslant_C$ を A^{tree} 上のクラスカル項順序とする．このとき，以下の性質が成り立つ．

$$(A, \leqslant_A) \text{ は WQO} \implies (A^{\mathsf{tree}}, \leqslant_C) \text{ は WQO}.$$

Proof. A は WQO であるが A^{tree} は WQO でないと仮定する．このとき，極小悪列補題 (系 2.7) より，A^{tree} は $\sqsubseteq$-極小 $\leqslant$-悪列 $\bar{t} = t_0, t_1, t_2, \dots$ を持つ．空語 ε は $\leqslant$-最小元であるから，$t_i = \varepsilon$ となることはあり得ない．したがって，$t_i = a_i * (u_1^i, u_2^i, \dots, u_{\ell(i)}^i)$ と分解できる．ただし，$(u_1^i, u_2^i, \dots, u_{\ell(i)}^i)$ は空語であり得る．

仮定より A は WQO だったので，補題 2.4 より，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増大な無限部分列を含む．したがって，その部分に対応する (t_n) の部分列を取ってくることによって，$i \leqslant j$ ならば $a_i \leqslant a_j$ となっていることを仮定できる．

各 $k \leqslant \ell(i)$ に対して，u_k^i は $t_i = a_i * (u_1^i, u_2^i, \dots, u_{\ell(i)}^i)$ の部分項であるから，$u_k^i \sqsubsetneq t_i$ である．特に，$u_k^i \in A^{\mathsf{tree}}(\sqsubsetneq \bar{t})$ である．補題 2.10 より，$A^{\mathsf{tree}}(\sqsubsetneq \bar{t})$ は WQO であるから，その部分集合

$$U = \{u_k^i : i \in \mathbb{N}, k \leqslant \ell(i)\}$$

もまた WQO をなしていることが分かる．それでは，いま，次の列を考えよう．

$$(u_1^0, u_2^0, \dots, u_{\ell(0)}^0), \quad (u_1^1, u_2^1, \dots, u_{\ell(1)}^1), \quad (u_1^2, u_2^2, \dots, u_{\ell(2)}^2), \dots \tag{2}$$

これは U 上の語の列だと思うことができる．U が WQO であったことから，ヒグマンの補題 (定理 3.14) より，U^* も WQO である．したがって，列 (2) は反上昇列ではない．つまり，ある $j < k$ が存在して，

$$(u_1^j, u_2^j, \dots, u_{\ell(j)}^j) \leqslant (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{\ell(k)}^k)$$

を導く．仮定より $a_j \leqslant a_k$ であったから，順序保存性を用いて，

$$t_j = a_j * (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{\ell(j)}^j) \leqslant a_k * (u_1^k, u_2^k, \dots, u_{\ell(k)}^k) = t_k$$

を得る．したがって，いずれにせよ $j < k$ かつ $t_j \leqslant t_k$ を得るが，これは (t_n) が悪列であるという仮定に矛盾する．よって，A^{tree} は WQO でないという仮定が誤っていたということである．つまり，A^{tree} は WQO である． $\square$

参考文献

[1] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. I. Discharging. *Illinois J. Math.*, 21(3):429–490, 1977.

[2] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, fourth edition, 2015.

[4] Leonard Eugene Dickson. Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with n Distinct Prime Factors. *Amer. J. Math.*, 35(4):413–422, 1913.

[5] A. Ehrenfeucht, D. Haussler, and G. Rozenberg. On regularity of context-free languages. *Theoret. Comput. Sci.*, 27(3):311–332, 1983.

[6] Paul Erdos and Richard Rado. Advanced Problems and Solutions: Solutions: 4358. *Amer. Math. Monthly*, 59(4):255–257, 1952.

[7] Paul Erdos, Victor Thebault, P. A. Piza, and R. D. Stalley. Advanced Problems and Solutions: Problems for Solution: 4352-4359. *Amer. Math. Monthly*, 56(7):479–480, 1949.

[8] Ilijas Farah. All automorphisms of the Calkin algebra are inner. *Ann. of Math. (2)*, 173(2):619–661, 2011.

[9] Roland Fraïssé. Sur la comparaison des types d'ordres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 226:1330–1331, 1948.

[10] Harvey Friedman, Neil Robertson, and Paul Seymour. The metamathematics of the graph minor theorem. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, volume 65 of *Contemp. Math.*, pages 229–261. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[11] Jean H. Gallier. What's so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0? A survey of some results in proof theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 53(3):199–260, 1991.

[12] F. Hausdorff. Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. *Math. Ann.*, 65(4):435–505, 1908.

[13] Graham Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 2:326–336, 1952.

[14] Kenji Iohara and Philippe Malbos. From analytical mechanics problems to rewriting theory through M. Janet's work. In *Two algebraic byways from differential equations: Gröbner bases and quivers*, volume 28 of *Algorithms Comput. Math.*, pages 3–74. Springer, Cham, [2020] ©2020.

[15] Takayuki Kihara and Antonio Montalbán. On the structure of the Wadge degrees of bqo-valued Borel functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(11):7885–7923, 2019.

[16] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.

[17] Joseph B. Kruskal. The theory of well-quasi-ordering: A frequently discovered concept. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 13:297–305, 1972.

[18] Kenneth Kunen. *Set Theory: An introduction to independence proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[19] Casimir Kuratowski. Sur le probléme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15(1):271–283, 1930.

[20] Richard Laver. On Fraïssé's order type conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 93:89–111, 1971.

[21] Richard Laver. On the consistency of Borel's conjecture. *Acta Math.*, 137(3-4):151–169, 1976.

[22] Chun-Hung Liu. Recent progress on well-quasi-ordering graphs. In *Well-quasi orders in computation, logic, language and reasoning—a unifying concept of proof theory, automata theory, formal languages and descriptive set theory*, volume 53 of *Trends Log. Stud. Log. Libr.*, pages 161–188. Springer, Cham, [2020] ©2020.

[23] Chun-Hung Liu and Robin Thomas. Robertson's conjecture I. well-quasi-ordering bounded tree-width graphs by the topological minor relation. arXiv:2006.00192, 2020.

[24] Pedro Valero Mejía. *On the use of quasiorders in formal language theory.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2020.

[25] C. St. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering trees. In *Theory of Graphs and its Applications (Proc. Sympos. Smolenice, 1963)*, pages 83–84. Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1964.

[26] C. St. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering infinite trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 61:697–720, 1965.

[27] Jeff Paris and Leo Harrington. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In *Handbook of mathematical logic*, volume 90 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 1133–1142. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[28] N. Christopher Phillips and Nik Weaver. The Calkin algebra has outer automorphisms. *Duke Math. J.*, 139(1):185–202, 2007.

[29] Michael Rathjen. The art of measuring the strength of theories. *Notices Amer. Math. Soc.*, 70(7):1071–1079, 2023.

[30] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. Wagner's conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.

[31] Neil Robertson and Paul Seymour. Graph minors XXIII. Nash-Williams' immersion conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 100(2):181–205, 2010.

[32] Saharon Shelah. Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions. *Israel J. Math.*, 18:243–256, 1974.

[33] Stephen G. Simpson. Nonprovability of certain combinatorial properties of finite trees. In *Harvey Friedman's research on the foundations of mathematics*, volume 117 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 87–117. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[34] Fons van Engelen, Arnold W. Miller, and John Steel. Rigid Borel sets and better quasi-order theory. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, volume 65 of *Contemp. Math.*, pages 199–222. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[35] K. Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.*, 114(1):570–590, 1937.

[36] Klaus Wagner. *Graphentheorie*, volume Band 248/248a* of *B. I. Hochschultaschenbücher.* Bibliographisches Institut, Mannheim-Vienna-Zürich, 1970.

[37] Wolfgang Wechler. *Universal Algebra for Computer Scientists*, volume 25 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.