計算可能性理論特論

木原 貴行
名古屋大学 情報学部・情報学研究科

最終更新日: 2024 年 3 月 18 日

§1. まえがき

本稿は，名古屋大学大学院情報学研究科の講義「計算可能性理論特論」の講義ノートである．本稿では，主に「チャーチ・チューリングの提唱以降」の計算可能性理論の歴史を辿りながら，計算可能性理論の研究について振り返りつつ，現代の整備された観点を用いて，いくつかの概念を再整備していく．

計算論の歴史については，「チャーチ・チューリングの提唱まで」が記述された書籍や資料は数多い．それにも関わらず，「チャーチ・チューリングの提唱以降」の歴史が記述された資料はほとんど存在しないようである．1936 年〜37 年のチャーチ・チューリングの提唱の主要な貢献者として，チャーチ (Alonzo Church), チューリング (Alan Turing), クリーネ (Stephen Cole Kleene), ポスト (Emil Post) の名が挙げられる．それでは「提唱以降」に何があっただろうか．1930 年代後半，提唱の直後にチャーチとクリーネがまず取り組んだテーマは**順序数** (*ordinal*) の計算論であった．彼らの研究の痕跡は，チャーチ・クリーネ順序数 ω_1^{CK} というある種の順序数の名として残されている．1938 年のチューリングの博士論文も順序数に関するものであり，タイトルは「順序数に基づく論理体系 (Systems of Logic Based on Ordinals)」である．もっとも，チューリングの博士論文は計算論というよりは純粋な論理学である．

ともあれ，計算論の歴史的文献において，この 1930 年代後半の「順序数の計算論」時代が言及されることはまずない．実際，計算可能性理論の「提唱以降」の歴史がまとまった文献はおそらく存在しないようだ．筆者はこの状況を少し改善したいと考えているため，本稿では計算可能性理論の発展の歴史的経緯にも少し踏み込んで記述することにする．ただし，筆者は歴史家ではなく，あくまで本稿の主題は数学的内容であることには注意してほしい．

本稿では主に「チャーチ・チューリングの提唱以降」の計算可能性理論について解説する（ただし，幾つかの計算論的概念の導入の動機を説明するために更に過去に遡ることはある）．したがって，提唱周辺に導入された計算論的概念については既知とするか，あるいは簡単な導入を行うに留める．たとえば，部分関数 $f\colon\subseteq\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の計算可能性の定義は既知とする．ただし，歴史的注意をしておくと，全域関数の計算可能性の定義は提唱時に与えられたものであるが，部分関数の計算可能性の定義は，提唱以降にクリーネによって定式化されたものである．

（未完成原稿である．随時アップデートしていく）

目次

§ 2. 計算可能性理論と階層

2.1. 算術的階層

計算可能性理論の最初期の主要な研究対象は，自然数上の関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ や自然数の部分集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ であった．計算量理論ではなく計算可能性理論の範疇であれば，$\mathbb{N}$ の代わりに有限アルファベット Λ の有限列全体 Λ^* を考えても，理論展開に変化はない．計算論的なアイデアを述べると，集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ や $A \subseteq \Lambda^*$ は，$n \in A$ か否かを判定せよという問題を意味し，しばしば決定問題 (decision problem) と呼ばれることもある．

定義 2.1. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算可能 (computable) とは，特性関数 $\chi_A\colon \mathbb{N} \to 2$ が計算可能であることを指す．

計算可能集合のことを決定可能 (decidable) 集合と呼ぶこともある．さて，計算可能性理論は，1936 年のチャーチとチューリングによるヒルベルト-アッカーマンの決定問題の否定的解決，すなわち計算不可能証明と共に産声を上げた．彼らの目的が計算可能性証明であったならば，「計算可能性の定義」を必要とすることはなかった．計算可能性証明のためには，具体的な有限的アルゴリズムを記述して，これは計算可能であると人々を納得させれば十分であった．しかし，計算不可能性証明においては，あらゆる計算可能な方法が通用しないことを示す必要がある．このためには「あらゆる計算可能な方法」とは何たるかを確定させる必要があった．すなわち，計算不可能性証明のためには「計算可能性の定義」が必要不可欠であり，このためにチャーチとチューリングはそれぞれ 1936 年に型なしラムダ計算とチューリング機械を計算可能性の定義として提示した．計算可能性の定義が与えられれば，容易に計算不可能な決定問題の存在を示すことができる．

観察 2.2. 計算不可能な集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が存在する． □

しかし，ヒルベルト-アッカーマンの決定問題を解決するためには，単に計算不可能な集合の存在を示すだけでは不足であり，ある種の式 φ によって与えられた決定問題の計算不可能性を示す必要があった．実際，多くの決定問題とは，何らかの式 φ によって与えられているものである．つまり，$\varphi(n)$ が真か偽かを判定せよという問題である．具体例としては，1900 年のヒルベルトの第 10 問題（整係数ディオファントス方程式の整数解の存在判定）や 1914 年のデーンによる群の語の問題などである．この 2 つの問題は，存在型の式 $\exists k\varphi(n,k)$ の真偽判定問題だとみなすことができる．

このような存在型の式の決定問題の一般論は，計算可能性理論の誕生の年，1936 年の時点で，クリーネの論文「自然数の一般再帰関数 (General recursive functions of natural numbers)」において展開された．クリーネは，この論文で再帰的枚挙可能 (recursively enumerable) という用語を導入している．つまり，計算量クラスで言うところの RE の概念である．少し冗長な名称なので，本稿では単に枚挙可能と呼ぶことにしたい．

補題 2.3 (クリーネ 1936)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対して，以下の条件は同値である．

(1) ある部分計算可能関数 f が存在して，$A = \{n \in \mathbb{N} : f(n)\downarrow\}$ である．
(2) ある部分計算可能関数 f が存在して，$A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ である．
(3) ある全域計算可能関数 f が存在して，$A = \emptyset$ または $A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ である．
(4) ある全域計算可能関数 f が存在して，$A = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N}. f(n,m) = 1\}$ である．

性質 (1) のことを認識可能 (recognizable) と呼び，性質 (2),(3) のことを枚挙可能 (enumerable) と呼び，

性質 (4) のことを Σ_1-定義可能 (Σ_1-definable) と呼ぶことにする．つまり，存在型の式による定義可能性である．

1936 年のチューリングによって証明された計算不可能性定理の一つが，停止問題の計算不可能性である．この定理は，単なる抽象的な計算不可能性定理ではなく，具体的な存在式で定義された決定問題の計算不可能性を示すものであった．

定理 2.4 (チューリング 1936)**.** 計算不可能な枚挙可能集合 $K \subseteq \mathbb{N}$ が存在する．

Proof. 以下で定義される停止問題 $K \subseteq \mathbb{N}$ は計算不可能である．

$$e \in K \iff \text{プログラム } e \text{ を実行すると，有限ステップで計算を停止する．}$$

これは明らかに認識可能なので，枚挙可能である． □

1936 年を過ぎると，1930 年代後半に発表された計算可能性理論の論文はあまり多くない．1937 年のチューリングによる不動点コンビネータの発見，1937 年から 1938 年に掛けての，チャーチとクリーネによる順序数の計算論の研究くらいである．この時期で行われた多くの計算論的研究が順序数に関するものであったというのは興味深いところである．この順序数の計算論の研究の中で，計算論の重要な基本定理が発表されていった．たとえば 1938 年のクリーネの論文「順序数の記法について (On notation for ordinal numbers)」において，有限計算論における基本定理である「smn 定理」や「再帰定理」が最初に発表されたのである．

とはいえ，クリーネが再帰定理を証明した目的は，超限再帰の計算可能性を示すためであったようである．現代的な用語を用いれば，1938 年のクリーネの順序数の論文は，（ある種の計算論的な圏において）帰納型 (W-型) の構成を行ったものであると見ることもできる（詳細については第 9 節を見よ）．また，1938 年のチューリングの博士論文も順序数と関わるものであったが，これはゲーデルの不完全性定理の研究の流れにあるもので，無矛盾性述語の付加による理論の拡大の超限累積の分析を行うものであった．

人々が，存在式の決定問題の分析に舞い戻るのは，1940 年代のことである．存在式の決定問題に特に興味を示したのは，ポストであった．1944 年，ポストは存在式の決定問題に関する膨大な研究内容をまとめた論文「正整数の再帰的枚挙可能集合とその決定問題 (Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems)」を出版する．この論文の中で，計算可能性理論における数多くの重要概念が導入されている．また，計算可能性と枚挙可能性を結び付けるポストの定理の証明もここで行われた．

定理 2.5 (ポストの定理 1944)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算可能であることと，A とその補集合が共に枚挙可能であることは同値である．

ちなみにクリーネの 1943 年の論文でも，Theorem V として同じ定理が提示されているが，後のクリーネはこの定理をポストの定理と呼んでいる．定理の証明時期と論文出版時期にずれが生じることは多々あるので，実際にはポストが先にこの定理を証明したのだろうと推察される．

ポストと比較すると，クリーネは，あまり存在式に対する拘りは無かったようで，より複雑な式の決定問題の分析にも取り組んだ．ここまでで扱った式は，計算可能な式の先頭に自然数上の存在量化が被せられたものであった．命題結合子の真理値計算は計算可能であるから，存在量化と全称量化のみが非自明な述語論理学

的概念である．すなわち計算可能性理論における次のステップは，自然数上の量化子であろう．1943 年，クリーネが「再帰的述語と量化子 (Recursive predicates and quantifiers)」と題した論文において注目したものは，量化記号の数による決定問題の分類である．

定義 2.6 (クリーネ 1943, モストフスキ 1947)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}^k$ に対する以下の帰納的定義を行う．

(1) 枚挙可能集合のことを Σ_1 集合と呼ぶ.
(2) A が Σ_n 集合ならば，$\mathbb{N}^k \backslash A$ は Π_n 集合である.
(3) $A \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ が Π_n 集合ならば，$\{x \in \mathbb{N}^k : \exists a \in \mathbb{N}.\ (a, x) \in A\}$ は Σ_{n+1} 集合である.
(4) A が Σ_n かつ Π_n ならば，A は Δ_n であると言う.

もう少し視覚的に分かりやすく言い換えれば, $A \subseteq \mathbb{N}$ が Σ_n 集合であるとは, ある計算可能関数 $f \colon \mathbb{N}^{n+1} \to 2$ が存在して，以下のように記述できることである．

$$x \in A \iff \exists a_1 \in \mathbb{N}\, \forall a_2 \in \mathbb{N}\, \exists a_3 \in \mathbb{N} \ldots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{N}\ \ f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, x) = 1$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ である．同様に，$A \subseteq \mathbb{N}$ が Π_n 集合であるとは，ある計算可能関数 $f \colon \mathbb{N}^{n+1} \to 2$ が存在して，以下のように記述できることである．

$$x \in A \iff \forall a_1 \in \mathbb{N}\, \exists a_2 \in \mathbb{N}\, \forall a_3 \in \mathbb{N} \ldots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{N}\ \ f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, x) = 1$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ である．この階層は，現在，**算術的階層** (*arithmetical hierarchy*) として知られるものである．算術的階層の用語を用いると，ポストの定理とは以下の主張であると述べることができる．

$$\text{計算可能} = \Delta_1$$

少し時代は飛ぶが，算術的階層に対する理解を深めるために，極限補題として知られる補題を紹介しておこう．これは，1959 年のシェーンフィールドの論文「非可解性の次数について (On degrees of unsolvability)」において証明されたものである．

補題 2.7 (シェーンフィールドの極限補題 1959)**.** 集合 A に対して，A が Δ_{n+1} 集合であることと，以下の条件を満たす計算可能関数 $f \colon \mathbb{N}^{n+1} \to 2$ が存在することは同値である．

$$\lim_{a_1 \to \infty} \lim_{a_2 \to \infty} \cdots \lim_{a_n \to \infty} f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, m) = \begin{cases} 1 & \textit{if } m \in A \\ 0 & \textit{if } m \notin A \end{cases}$$

つまり，Δ_{n+1} 集合とは，計算可能関数の n 重極限として得られる集合である．この補題によって，特に Δ_2 集合は極限計算可能集合と呼ばれることもある．

ともあれ，こうして，1940 年代頃から，自然数上の述語論理式によって定義可能な部分集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ の分類に興味が向かうこととなる．1940 年代の計算可能性理論は，クリーネによって主導されていたと言ってよいだろう．この時期のクリーネの興味の 2 つの支柱は，算術的量化と直観主義算術であった．前者については 1943 年に発表された「再帰的述語と量化子 (Recursive predicates and quantifiers)」であり，後者については

1945 年に発表された「直観主義数論の解釈について (On the interpretation of intuitionistic number theory)」である．クリーネの 1943 年の論文は，後世では，算術的階層を導入した論文と称されるが，算術的量化記号の数に関する詳細な分析を行ってはいるものの，明示的には算術的階層を導入はしていないようだ．とはいえ，Theorem II は，算術的階層の厳密性を示すものと考えられる．この論文は，当時のクリーネの関心からか，直観主義論理における証明可能性に強く注意を払っている．さて，この論文には，算術的量化に関して，非常に興味深い一文がある．

> 存在と全称量化という論理演算と，射影と共通部分という幾何的演算の間の類推はよく知られている．本論文の結果とボレルおよびベールの理論との間の結び付きの可能性が示唆される．[*1]

この種の類推は幾度となく言及された．クリーネよりも明示的な形で算術的階層を導入したのは，1947 年のモストフスキの論文「正整数の定義可能集合について (On definable sets of positive integers)」であった．モストフスキの記法では，$\mathbb{N}^k$ の Σ^0_n 部分集合は $P^{(k)}_n$ と書かれ，Π^0_n 部分集合は $Q^{(k)}_n$ と書かれていた．算術的階層の定義 2.6 の記法を定着させたのは，1958 年のアディソンの論文である．ともあれ，1947 年の論文において，モストフスキはこう述べる．

> 本論文の目的は，上記の 2 つの集合/関数のクラス（※計算可能，枚挙可能のこと）が，射影集合の特性に酷似したクラスの無限系列の先頭部を形成することを示すことである．[*2]

モストフスキが述べるところの，射影集合の特性に酷似した系列が，算術的階層であり，その第一層が計算可能性，枚挙可能性に相当する．クリーネがボレル/ベール階層の類似として算術的階層を見たのに対して，モストフスキは射影集合の類似として算術的階層を見た．

> 射影集合の理論に倣い，新しいクラスの理論を非常に広範に発展させることができそうである．この種の問題のうち，ここでは 1 つだけを取り上げる．すなわち，ススリンの定理の類似，自身も補集合も再帰的枚挙可能な集合は，一般再帰的でなければならないという定理である．こうして，射影集合との類推がもたらす有用性が実証されたと思う．[*3]

つまり，モストフスキは，ポストの定理 2.5 を射影集合の理論におけるススリンの定理と呼ばれるものの類似だと考えたのである．

2.2. ボレル階層

1943 年のクリーネと 1947 年のモストフスキは，算術的階層をそれぞれ「ボレルおよびベールの理論」および「射影集合の理論」と結びつけている．この意味を理解するために，歴史を少し遡ろう．前者に関して，測

[*1] 原文: The analogy between the logical operations of existential and universal quantification and geometrical operations of projection and intersection, respectively, is well known. The possibility of a connection between present results and theories of Borel and Baire is suggested. 第一文には，タルスキによるものとの注釈があり，第二文には，ゲーデルとウラムによる示唆であるとの注釈がある．

[*2] 原文: The aim of this paper is to show that the two above mentioned classes of sets (and of functions) form the beginning of an infinite sequence of classes whose properties closely resemble those of projective sets.

[*3] 原文: It seems to be possible to develop very extensively the theory of the new classes on the pattern of the theory of projective sets. From this kind of problems only one will be discussed here, to wit the analogue of Souslin's theorem, i.e. the theorem that a recursively enumerable set whose complement is also recursively enumerable must be general recursive. The utility resulting from the analogy with projective sets is thus I think demonstrated.

度論などの分野における基本概念であるボレル集合と呼ばれるものがある．これは，1898 年のボレルによる「関数論講義 (Leçons sur la theorie des fonctions)」において導入されたもので，現代的な用語を用いれば，開集合を含む最小の σ-代数というものであるが，もう少し具体的にボレル集合の定義を記述しよう．ここでは，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のボレル集合だけを議論することにする．

定義 2.8 (ボレル 1898)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ に対する以下の帰納的定義を行う．

(1) 開球 $B \subseteq \mathbb{R}^d$ はボレル集合である．
(2) A がボレル集合ならば，補集合 $\mathbb{R}\backslash A$ もまたボレル集合である．
(3) ボレル集合の可算列 $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ もまたボレル集合である．

補集合と否定 $\neg$, 可算和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ と存在量化 $\exists n \in \mathbb{N}$ の対応を考えれば，ボレル集合と算術的階層に何らかの関連性がありそうなことは想像が付くと思われる．ボレルの目的は，測度を与えられる集合の十分大きなクラスを提示することであり，この時点ではボレル集合の階層構造は与えられていなかった．

階層的な構造に最初に興味を持ったのは，ベールだと思われる．ベールは 1899 年の博士論文「実変数関数について (Sur les fonctions de variables réelles)」の第 III.1 節において，実関数の階級について議論した．

定義 2.9 (ベール 1899)**.** 関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と順序数 α に対する以下の帰納的定義を行う．

(1) 連続関数はベール階級 0 である．
(2) ベール階級 $< \alpha$ の関数の可算列 $f_0, f_1, f_2, \dots$ の各点極限 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき，関数 f はベール階級 $\leqslant \alpha$ とする．

ある順序数 α について，ベール階級 α である関数は，ベール級関数と呼ばれる．ベールは，可算順序数 α だけしか考える必要がないことを指摘している．ベールは，0 級，1 級，2 級の関数が存在することを示したが，その時点ではベール 3 級以上の関数の具体例は与えていなかった．たとえば，ベールが提示した 2 級関数の例は，ディリクレの至る所不連続な関数 $\chi_{\mathbb{Q}}$ である．各可算順序数 α に対して，ベール α 級関数の存在を明かしたのは，1905 年のルベーグの論文「解析的に表現可能な関数について (Sur les fonctions représentables analytiquement)」であるようだ．つまり，任意の可算順序数 α に対して，ベール α 級関数が存在する．

この論文の第 IV 節の冒頭において，ルベーグはベール階級を用いてボレル集合の階層を与えているが，これは現代の意味のボレル階層とは定義が異なる．ルベーグによれば，集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ がそれぞれ階級 α の F-集合および O-集合であるとは，あるベール α 級関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と $p, q \in \mathbb{R}$ が存在して，以下のように書けることである．

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : p \leqslant f(x) \leqslant q\} \qquad\qquad B = \{x \in \mathbb{R}^d : p < f(x) < q\}$$

つまり，ルベーグは，ベール級関数による区間の逆像として，ボレル集合の階層を定義することを試みた．ルベーグの定理によれば，集合 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ がボレル集合であることと，ある可算順序数 α について，A が α 級の F-または O-集合であることは同値である．より現代的なボレル階層の定義は，ハウスドルフの 1914 年の教科書「集合論基礎 (Grundzüge der Mengenlehre)」において与えられた．

定義 2.10 (ハウスドルフ 1914)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^d$ に対する以下の帰納的定義を行う．

(1) 開集合のことを $\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ 集合と呼ぶ．
(2) A が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_n$ 集合ならば，$\mathbb{N}\setminus A$ は $\underset{\sim}{\Pi}^0_n$ 集合である．
(3) $\underset{\sim}{\Pi}^0_n$ 集合の可算列 $A_0, A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ は $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{n+1}$ 集合である．
(4) A が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_n$ かつ $\underset{\sim}{\Pi}^0_n$ ならば，A は $\underset{\sim}{\Delta}^0_n$ であると言う．

もう少し視覚的に分かりやすく言い換えれば，$A \subseteq \mathbb{R}^d$ が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{n+1}$ 集合であるとは，以下の形で書けることを意味する．

$$A = \bigcup_{a_1\in\mathbb{N}} \bigcap_{a_2\in\mathbb{N}} \bigcup_{a_3\in\mathbb{N}} \cdots \bigodot_{a_n\in\mathbb{N}} B_{a_1a_2\dots a_n}$$

ここで，n が偶数ならば $\bigodot = \bigcap$ かつ各 $B_{a_1a_2\dots a_n}$ は開集合であり，n が奇数ならば $\bigodot = \bigcup$ かつ各 $B_{a_1a_2\dots a_n}$ は閉集合である．同様に，$A \subseteq \mathbb{R}^d$ が $\underset{\sim}{\Pi}^0_{n+1}$ 集合であるとは，以下の形で書けることを意味する．

$$A = \bigcap_{a_1\in\mathbb{N}} \bigcup_{a_2\in\mathbb{N}} \bigcap_{a_3\in\mathbb{N}} \cdots \bigodot_{a_n\in\mathbb{N}} B_{a_1a_2\dots a_n}$$

ここで，n が偶数ならば $\bigodot = \bigcup$ かつ各 $B_{a_1a_2\dots a_n}$ は閉集合であり，n が偶数ならば $\bigodot = \bigcap$ かつ各 $B_{a_1a_2\dots a_n}$ は開集合である．

ボレル階層と算術的階層との類似性は明らかであろうが，より算術的階層に寄せた記述を行うならば，$A \subseteq \mathbb{R}^d$ が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_n$ 集合であるとは，ある連続関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，

$$x \in A \iff \exists a_1 \in \mathbb{N}\,\forall a_2 \in \mathbb{N}\,\exists a_3 \in \mathbb{N} \dots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{N}\;\; f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, x) \in I$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ かつ I は閉区間であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ かつ I は開区間である．同様に，$A \subseteq \mathbb{R}^d$ が $\underset{\sim}{\Pi}^0_n$ 集合であるとは，ある連続関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と区間 $I \subseteq \mathbb{R}$ が存在して，

$$x \in A \iff \forall a_1 \in \mathbb{N}\,\exists a_2 \in \mathbb{N}\,\forall a_3 \in \mathbb{N} \dots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{N}\;\; f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, x) \in I$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ かつ I は開区間であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ かつ I は閉区間である．もちろんボレル階層と算術的階層の関連性が明らかな理由は，我々が 1958 年のアディソンによって整理された記法を用いているためである．1914 年のハウスドルフの記法に従うならば，たとえば，$\underset{\sim}{\Sigma}^0_2, \underset{\sim}{\Sigma}^0_3, \underset{\sim}{\Sigma}^0_4$ はそれぞれ $F_\sigma, G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma}$ と書かれ，$\underset{\sim}{\Pi}^0_2, \underset{\sim}{\Pi}^0_3, \underset{\sim}{\Pi}^0_4$ はそれぞれ $G_\delta, F_{\sigma\delta}, G_{\delta\sigma\delta}$ と書かれる．

ハウスドルフはベールと同様に，ボレル集合の可算順序数に沿う階層を扱った．つまり，実際には，可算順序数 α に対する $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\alpha, \underset{\sim}{\Pi}^0_\alpha, \underset{\sim}{\Delta}^0_\alpha$ の概念が与えられており，それによってボレル集合を覆い尽くせることをハウスドルフは示したのである．

関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ がボレル可測 (Borel measurable) であるとは，任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ に対して，$f^{-1}[U]$ がボレル集合であることを指す．これは，以下の条件と同値である．

$$(\forall p, q \in \mathbb{R}) \quad \{x \in \mathbb{R}^d : p < f(x) < q\} \text{ is Borel.}$$

定義 2.11. 関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\alpha$-可測 ($\underset{\sim}{\Sigma}^0_\alpha$-measurable) であるとは，任意の開集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ に対して，$f^{-1}[U]$ が $\underset{\sim}{\Sigma}^0_\alpha$-集合であることを指す．

たとえば，$\underset{\sim}{\Sigma}^0_1$-可測性は位相的連続性に他ならない．上述のように 1905 年のルベーグはベール級関数による開区間の逆像によってボレル集合の階級を与えたが，逆に，開区間の逆像のボレル階級によって関数のベール階級を復元できる．この意味で，ベール階層とボレル階層は本質的に同一のものである．

定理 2.12 (ルベーグ-ハウスドルフの定理)**.** 任意の可算順序数 α に対して，関数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ がベール α 級であることと $\underset{\sim}{\Sigma}^0_{1+\alpha}$-可測であることは同値である．

より一般的な空間を考察の対象としている場合は，上記の定理はルベーグ-ハウスドルフ-バナッハの定理と呼ばれることもある．ルベーグ-ハウスドルフの定理は，ボレル階層（算術的量化の階層）とベール階層（極限の階層）を対応付ける．

$$\text{ボレル階層（算術的量化の階層）} \quad \approx \quad \text{ベール階層（極限の階層）}$$

ところで，計算可能性理論において，算術的量化の階層と極限の階層を対応付ける結果を既に見た．それはシェーンフィールドの極限補題 2.7 である．

以上より，算術的階層の定義はボレル階層の定義と酷似しており，そして，算術的階層には極限補題というルベーグ-ハウスドルフの定理の計算的類似物が存在する．これによって，算術的階層とボレル階層の深い結び付きへの確信が深まることだろう．しかし，極限補題が証明されたのは 1959 年であり，もちろん 1940 年代のクリーネとモストフスキには知る由も無かった．その時点で彼らが得ていた算術的階層に関する主な定理はポストの定理 2.5 であり，そして，ポストの定理の類似物はボレル階層には一見存在しないという困難があったのである．この理由のために，モストフスキは算術的階層とボレル階層を結び付けることができなかった．

2.3. 射影階層

代わりにモストフスキが注目したものが，射影階層であった．射影階層の理論は，上述の 1905 年のルベーグの論文に含まれていた誤りを発端とする．ルベーグは，平面のボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}^2$ の数直線上への射影 $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}.\ (x, y) \in B\}$ もまたボレル集合であるという誤った主張を述べていた．ルベーグの誤りはしばらく気づかれることがなかったが，ある研究を切っ掛けに，ルベーグの誤りに焦点が当たることとなる．

歴史を更に遡ると，1878 年に，カントールは連続体仮説 (continuum hypothesis) と呼ばれる実数の個数（連続体濃度）に関する仮説を提示した．連続体仮説には様々な同値な定式化があるが，ここで用いる定式化は以下である．

連続体仮説: 任意の集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ の濃度は高々可算あるいは連続体濃度である．

カントール自身は，閉集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対しては上記の主張が正しいことを確認した．1903 年にヤングは $\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ 集合に対する連続体仮説が成立することを示し，1914 年には，ボレル階層の理論を発展させていたハウスドルフが $\underset{\sim}{\Pi}^0_4$ 集合に対する連続体仮説が成立することを示した．そして 1916 年，ハウスドルフ，そして独立にアレクサンドロフによって，ボレル集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対する連続体仮説が成立することが発表されたのである．つまり，$\mathbb{R}$ のボレル集合の濃度は高々可算であるか連続体濃度を持つ．したがって，連続体仮説の解決へ向けた次のステップは，ボレル集合族よりも少し広範なクラスについて考察を深めることである．

その頃，モスクワのルジンの研究グループがボレル集合周辺の理論に注目しており，上述のアレクサンドロフもまたルジンの学生であった．ボレル集合に対する連続体仮説の解決の後，ルジンの別の学生ススリンもこ

の研究に加わり，ボレル集合の分析のためにルベーグの論文を読み始めたようである．そして，1916 年夏，ススリンはルベーグの誤りを発見したとされている．つまり，平面のボレル集合の数直線の射影はボレル集合とは限らない！　したがって，射影を取るとボレル集合族よりも真に広範なクラスを得られるのである．

定義 2.13. 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ が解析的 (analytic) であるとは，それがあるボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ の射影として得られることである．

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^k : \exists y \in \mathbb{R}.\ (\bar{x}, y) \in B\}.$$

ススリンの発見を言い換えれば，ボレル集合でない解析的集合が存在する，ということである．すぐに，解析的集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対する連続体仮説もまた示された．そして，ススリンの 1917 年の論文「超限数によらない B-可測集合の定義について (Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis)」において示されたものが，前述のススリンの定理である．

定理 2.14 (ススリンの定理 1917)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ がボレル集合であることと，A とその補集合が共に解析的集合であることは同値である．

ススリンの重要なアイデアは，現在ススリンの A-演算と呼ばれるものであったが，本稿では詳細を説明しない．ただし，A-演算のアイデアを利用すれば，解析的集合の定義における B を $\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ 集合であると仮定してよいことが分かる．本稿ではこの観察は重要ではないが，ススリンの目的においては極めて重要である．

ススリンの論文の題目に注目すると，まず B-可測集合とはボレル集合のことであり，そしてボレル集合の定義を構成的に理解すると，ボレル階層という超限順序数を用いた累積的定義によってボレル集合族が構成されていくプロセスである．ススリンの論文の題目が主張していることは，「超限順序数を用いて定義されるはずのボレル集合に対して，超限順序数を用いない定義を与えた」というものである．$\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ 集合であれば，定義に超限順序数は必要ないため，上述の観察より，解析的集合は超限順序数を用いずに定義できる．そして，ススリンの定理 2.14 より，ボレル集合は解析的集合を用いて定義できるから，ボレル集合の定義に超限順序数は不要である，という寸法である．正確には，ススリンはこれを $\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ 集合経由ではなく，A-演算経由で説明した．

さて，モストフスキのアイデアに戻ろう．まず，枚挙可能集合と解析的集合を比べてみたい．枚挙可能性の Σ_1-定義可能性に注目すれば，枚挙可能集合 $A \subseteq \mathbb{N}^k$ と解析的集合 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ はそれぞれ以下のように表せる．

$$A = \{\bar{x} \in \mathbb{N}^k : \exists y \in \mathbb{N}.\ (\bar{x}, y) \in B\} \qquad\qquad A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^k : \exists y \in \mathbb{R}.\ (\bar{x}, y) \in B\}$$

ここで，前者における B は計算可能集合であり，後者における B はボレル集合である．したがって，モストフスキの類推

$$\frac{\text{計算可能}}{\text{枚挙可能}} \approx \frac{\text{ボレル}}{\text{解析的}}$$

も妥当に感じるかもしれない．それを後押しするのが，ポストの定理 2.5 とススリンの定理 2.14 である．

$$\text{計算可能} = \text{枚挙可能かつ余枚挙可能} \qquad\qquad \text{ボレル} = \text{解析的かつ余解析的}$$

ここで，余 X とは，補集合が X であることを意味する．モストフスキは，この類推に基づき，計算可能性そして算術的階層の理論を，射影集合の理論と関連付けた．これについて理解するためには，まずは射影集合の理論を説明する必要がある．

解析的集合の定義に示唆されるように，部分集合 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ を構成するための重要なキーワードが射影である．1925 年，ルジンとシエルピンスキは独立に，射影の累積が $\mathbb{R}^k$ の部分集合の極めて広大なクラスを与えることを認識し，射影によって定義可能な集合を研究することを提示した．

定義 2.15 (ルジン 1925, シエルピンスキ 1925)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^k$ に対する以下の帰納的定義を行う．

(1) 解析的集合のことを $\utilde{\Sigma}^1_1$ 集合と呼ぶ．
(2) A が $\utilde{\Sigma}^1_n$ 集合ならば，$\mathbb{R}^k \backslash A$ は $\utilde{\Pi}^1_n$ 集合である．
(3) $A \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ が $\utilde{\Pi}^1_n$ 集合ならば，$\{x \in \mathbb{R}^k : \exists a \in \mathbb{R}.\ (a,x) \in A\}$ は $\utilde{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合である．
(4) A が $\utilde{\Sigma}^1_n$ かつ $\utilde{\Pi}^1_n$ ならば，A は $\utilde{\Delta}^1_n$ であると言う．

もう少し視覚的に分かりやすく言い換えれば，$A \subseteq \mathbb{R}$ が $\utilde{\Sigma}^1_n$ 集合であるとは，あるボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して，

$$x \in A \iff \exists a_1 \in \mathbb{R}\,\forall a_2 \in \mathbb{R}\,\exists a_3 \in \mathbb{R} \ldots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{R}\ \ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, x) \in B$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ である．同様に，$A \subseteq \mathbb{R}$ が Π_n 集合であるとは，あるボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して，

$$x \in A \iff \forall a_1 \in \mathbb{R}\,\exists a_2 \in \mathbb{R}\,\forall a_3 \in \mathbb{R} \ldots \mathsf{Q} a_n \in \mathbb{R}\ \ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, x) \in B$$

ここで，n が偶数ならば $\mathsf{Q} = \exists$ であり，n が奇数ならば $\mathsf{Q} = \forall$ である．これが，射影階層 (projective hierarchy) として知られるものである．算術的階層との関連性は明らかであろう．1947 年のモストフスキは，算術的階層に関する定理を射影集合の理論からの類推によって示していくことを提案したのである．

しかし，モストフスキの目論見は脆くも崩れ去ることとなる．1950 年，クリーネが発表した論文「ゲーデルの定理の対称形 (A symmetric form of Gödel's theorem)」は，以下の文章から始まる．

> 再帰的枚挙可能な集合は解析的集合と，一般再帰的集合はボレル集合と，驚くほどよく似た振る舞いをすることが，特にモストフスキの論文で指摘されている．ルジンの定理によれば，2 つの非交叉な解析的集合は常にボレル集合で分離できる，つまり，このボレル集合は与えられた解析的集合の一方を含み，他方とは交わらない．我々は，一般再帰集合では分離できない 2 つの非交叉な再帰的枚挙可能集合 C_0 と C_1 を構成しよう．この例は，2 つの理論の間に厳密な並列論がないことを示すものである．[*4]

非交叉な集合 $A, B \subseteq X$ に対して，関数 $f\colon X \to 2$ が A, B を分離するとは，任意の $x \in X$ に対して以下の条件を満たすことである．

$$\begin{cases} x \in A \implies f(x) = 1 \\ x \in B \implies f(x) = 0 \end{cases}$$

ポストの定理の証明のアイデアを用いれば，余枚挙可能集合は計算可能関数によって分離可能であることが分かる．

*4 原文: It has been remarked, particularly in articles of Mostowskii, that recursively enumerable sets behave surprisingly similarly to analytic sets and general recursive sets to Borel sets. It is a theorem of Lusin that two disjoint analytic sets can always be separated by a Borel set, i.e. this Borel set contains one of the given analytic sets and is disjoint from the other. We shall construct two disjoint recursively enumerable sets C_0 and C_1 which cannot be separated by a general recursive set. This example shows that there is no exact parallelism between the two theories.

観察 2.16. 非交叉な余枚挙可能集合の対 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ は，計算可能関数によって分離できる．

それに対して，1950 年のクリーネは，枚挙可能集合はこの性質を持たないことを証明したのである．

命題 2.17 (クリーネ 1950)**.** ある非交叉な枚挙可能集合の対 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ で，計算可能関数によって分離できないものが存在する．

Proof. たとえば，以下の集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ を考えよ．

$$A = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \text{ペアノ算術で } \varphi \text{ を証明可能である }\} \qquad B = \{\ulcorner\varphi\urcorner : \text{ペアノ算術で } \neg\varphi \text{ を証明可能である }\}$$

ここで，算術的文 φ は文字列であるから，自然数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ としてコードされている．より計算論的な例を挙げるならば，以下の集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ を考えてもよい．

$$A = \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e(0) \downarrow= 0\} \qquad\qquad B = \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e(0) \downarrow= 1\}$$

ここで，φ_e は e 番目の部分計算可能関数である． □

上記の証明中の最初のような例があるから，クリーネの論文の題目のように「ゲーデルの定理の対称形」のように思うこともできる．ともあれ，クリーネはこの自身の結果を根拠にして，算術的階層と射影階層との間の類推は成立しないと述べたのである．この理由は，1917 年に証明された以下のルジンの分離定理にある．

定理 2.18 (ルジンの分離定理)**.** 非交叉な解析的集合の対 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ は，ボレル可測関数によって分離できる．

クリーネの命題 2.17 によれば，枚挙可能集合は計算可能関数で分離できるとは限らないのに対し，ルジンの分離定理 2.18 によれば，解析的集合は必ずボレル可測関数で分離できるのである．したがって，モストフスキの類推は成立していない．

その後の理論の発展を見ると，モストフスキの類推よりもクリーネの類推の方がより正しかったと言えそうだ．とはいえ，算術的階層が射影階層に類似しているとモストフスキが考えたのも無理もない．あくまで計算可能性と枚挙可能性は，階層の第一層に位置するものである．射影階層の第一層には一つの理論だけがあったが，ボレル階層の第一層はつまりは位相空間論であり，空間の性質に強く依存する結果が提示される．そこで計算可能集合の類似物を見つけるのは困難である．

計算可能集合は一旦置いておき，計算可能関数にさえ注目すれば，計算可能性理論と位相空間論の類推は難なく見つかる．

$$\frac{\text{計算可能関数}}{\text{枚挙可能集合}} \approx \frac{\text{連続写像}}{\text{開集合}}$$

とはいえ，ポストの定理 2.5 や観察 2.16 の類推を見つけるためには，計算可能性理論に対応する適切な空間を発見するというステップを必要とする．ポストの定理は観察 2.16 の特別な場合であることに注意すれば，後者のみを考えればよい．位相空間 X が強零次元 (strongly zero-dimensional) であるとは，任意の非交叉な閉集合 $A, B \subseteq X$ が連続関数 $f : X \to 2$ で分離可能であることを指す．観察 2.16 は，明らかに強零次元性の計算的類似である．計算可能性理論の主要な研究対象は，自然数の部分集合や自然数上の関数であるから，適切な空間としてたとえばカントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ やベール空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を考えることができる．これらの空間は，強零次元空間であるから，確かに計算可能性理論と位相空間論の間の類推が成立しているのである．

それではモストフスキの類推が完全に放棄されるべきかというと，そういうわけでもない．ルジンの分離定理と観察 2.16 を比較すると，類推を以下のように補正することが考えられる．

$$\frac{\text{計算可能}}{\text{枚挙可能}} \approx \frac{\text{ボレル}}{\text{余解析的}}$$

このように類推を補正しても，ススリンの定理とポストの定理の間の類推も保たれる．しかし，枚挙可能集合は存在式で定義されていて，余解析的集合は全称式で定義されているから，これは最も根源的な類推を失っているように見える．確かに表面的な定義式に惑わされてしまうと，補正した類推は，分離定理から無理やり作り上げたものであり，荒唐無稽であると結論付けたくなる．しかし，背後に何か隠された構造 $\mathbb{O}$ があって，実は，解析集合は存在量化 $\exists x \in \mathbb{R}$ ではなく，全称量化 $\forall x \in \mathbb{O}$ によって与えられるというのが本来の姿だったとしたらどうだろう．同様に，余解析集合は全称量化 $\forall x \in \mathbb{R}$ ではなく，存在量化 $\exists x \in \mathbb{O}$ によって与えられるというのが本来の姿かもしれない．理論の次のステップは，解析集合と余解析集合の「本来の姿」が暴かれ，補正した類推に正当性が与えられるというものであった．しかし，その説明は一旦保留にして，少し別の話へと移ろう．

§ 3. 計算可能汎関数と位相

3.1. 連続性と計算可能性

次に，計算可能性と連続性の結び付きについて足を踏み入れてみることにしよう．興味深いことに，計算可能性と連続性の関連性が最初に明示的に指摘されたのは，計算可能性の定義すら誕生していない時代のことであった．計算可能性の厳密な定義が提示されたのは，1936 年のことであるが，それ以前にも計算可能性に関する思索を深めた人々がいたのである．

その代表的な人物が，ボレルであった．たとえば，1912 年のボレルの論文「定積分の計算について (Le calcul des intégrales définies)」の序章第 II 節の題は「計算可能実数 (Nombres calculables)」であり，第 III 節の題は「計算可能実関数と漸近的に定義された関数 (Les fonctions calculables et les fonctions à définition asymptotique)」であった．ここでボレルが計算可能実数 (nombre calculable) および計算可能実関数 (fonction calculable) の定義を試みたことはよく知られる．ボレルの定義は非形式的なものであるが，アイデアを大雑把に説明すると，以下のようなものである．

- 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，任意の精度の有理近似を与えるアルゴリズムが存在することを意味する．
- 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，与えられた計算可能な入力 $\alpha \in \mathbb{R}$ の情報を元に，$f(\alpha)$ に対する任意精度の有理近似を与えるアルゴリズムが存在することである．

ボレルの定義はあくまで非形式的なものなので，詳細を理解するように努める必要はないが，主たるアイデアは，実数を任意精度有理近似として取り扱うというものである．したがって，関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，「出力 $f(\alpha)$ のどんな ε-近似も，入力 α のある δ-近似の情報から求められる」ということであると言い換えられる．もちろん，これは ε-δ 論法による f の連続性の定義とほとんど同じものである．このようにして，ボレルは関数の計算可能性と連続性の関連性を指摘している．

その後，計算可能性と連続性の結び付きの重要性が指摘されたのは，1950 年代の高階汎関数の計算可能性の研究の文脈であるようだ．自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は離散空間であり，位相的には退屈なものであるから，自

然数上の関数を扱っている限りでは，その位相的側面の重要性を認識するのは難しい．しかし，高階汎関数を扱う場合，たとえば入力として自然数上の関数を取るとすれば，入力空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は非自明な位相を持つ．

高階関数の計算可能性に関する研究の歴史は長い．もちろん，チャーチらによって深く研究されていたラムダ計算は，高階関数の計算システムである．それ以前にも，1920 年代のヒルベルトやアッカーマンは高階原始再帰の萌芽的な研究をしており[*5]，1940 年代前半頃からは，ゲーデルは高階原始再帰による直観主義算術の解釈の研究を始めていた．そして，1950 年代中頃になると，高階汎関数の計算可能性理論の研究が活発になり始める．

■全域関数を入力とする汎関数: まず，全域関数を入力とする汎関数の位相的側面について議論しよう．汎関数 $\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の計算は，入力関数 f が与えられたとき，計算中で f の有限個の値 $f(n_0), f(n_1), f(n_2), \dots$ にアクセスして，$\Phi(f)$ の値を出力するものである．全域関数 f を入力とする場合には，有限個の値 $f(0), f(1), f(2), \dots$ に順次アクセスするというプロセスだけ考えても計算可能性の定義に代わりはない．

$$f(0), f(1), f(2), \dots \quad \overset{\Phi}{\longmapsto} \quad \text{output}$$

したがって，$\Phi(f)$ の計算プロセスは，ある始切片 $\sigma \sqsubset f$ の情報まで読み込んだ後に出力を返すものである．

定義 3.1. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が**計算可能** (*computable*) であるとは，ある部分計算可能関数 $\varphi\colon\subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f) = n \iff \exists \sigma \sqsubset f.\ \varphi(\sigma) = n$$

ここで，$\sigma \sqsubset \tau$ とは，σ が τ の始切片であることを意味する．同様の方法で $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の計算可能性を定義できるので，カリー化によって $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の計算可能性を定義できる．より一般的に，全域関数を入力として部分関数を出力する部分汎関数が計算可能であるとは，ある計算可能関数 $\Psi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することとすればよい．

$$\Phi(f)(n) \downarrow = m \iff \Psi(f, n) \downarrow = m$$

入出力が全域関数の場合には，別の方法で定義することもできる．部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算可能であるとは，ある部分計算可能関数 $\varphi\colon\subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\tau \sqsubset \Phi(f) \iff \exists \sigma \sqsubset f.\ \tau \sqsubset \varphi(\sigma)$$

ここで，$X^{<\mathbb{N}}$ は X 上の有限列全体の集合を表すものとする．我々が知りたいものは，計算可能性と連続性の結び付きであるが，これを確認するのは難しくない．全域関数の空間は，離散空間 $\mathbb{N}$ の可算積 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ として得られるので，位相空間論において，汎関数の連続性は以下のように特徴付けられることを確認できる．

観察 3.2. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が**連続** (*continuous*) であるとは，ある部分関数 $\varphi\colon\subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f) = n \iff \exists \sigma \sqsubset f.\ \varphi(\sigma) = n$$

[*5] たとえば，アッカーマン関数のオリジナルの定義などは，高階関数を経由した原始再帰によって与えられたものである．

つまり，φ から計算可能性を取り除くと，位相的連続性を得ることができる．終域を関数空間に変えても同様である．これにて計算可能性と連続性の結び付きはおおよそ理解できたと思うが，このアイデアをもう少し一般化したい．このために，関数 φ よりもグラフを考えて，計算可能性の定義を書き換えよう．部分計算可能関数のグラフは枚挙可能集合であったことを思い出せば，以下が成立することは容易に確認できる．

観察 3.3. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ あるいは $\Psi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算可能であるとは，ある枚挙可能集合 $V \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ あるいは $W \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f) = n \iff \exists\sigma \sqsubset f.\ (\sigma, n) \in V \qquad\qquad \tau \sqsubset \Phi(f) \iff \exists\sigma \sqsubset f.\ (\sigma, \tau) \in W$$

写像 f が連続であるとは，開集合の f による逆像が開集合であることであった．ここでは，位相空間の開基を用いた連続写像の記述を考えた方が，計算可能性との結び付きを理解しやすい．

事実 3.4. 位相空間 X と Y がそれぞれ開基 $\{A_i\}_{i\in I}$ と $\{B_j\}_{j\in J}$ を持つとき，$\Phi\colon X \to Y$ が連続であるとは，各 $j \in J$ に対して，ある $V_j \subseteq I$ が存在して，以下の条件を満たすことである．

$$\Phi(x) \in B_j \iff \exists i \in V_j.\ x \in A_i.$$

定義 3.1 と観察 3.2 の関係を思い出すと，汎関数の計算可能性の定義の φ から計算可能性を取り除いたものが連続性であり，逆に，連続性の定義の適切な部分に計算可能性を書き加えたものが汎関数の計算可能性であると言える．したがって，上記の連続性の定義の適切な部分に計算可能性を書き加えることによって，様々な空間における計算可能性の定義を導入できそうである．

定義 3.5. 可算開基を備えた空間 $(X, \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ と $(Y, \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ に対して，$\Phi\colon X \to Y$ が**計算的連続** (*computably continuous*) であるとは，ある枚挙可能集合 $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することを意味する．

$$\Phi(x) \in B_j \iff \exists i\ [(i, j) \in V \text{ and } x \in A_i].$$

この定義が，定義 3.1 と整合的であることを確認しよう．現在考えている空間は，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ である．離散空間 $\mathbb{N}$ は，各 $\{n\}$ を基本開集合とする開基を持つ．全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は，各 $[\sigma] := \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sigma \sqsubset f\}$ を基本開集合とする開基を持つ．

観察 3.6. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ あるいは $\Psi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算可能であることと計算的連続であることは同値である．

Proof. 上に記述した具体的な開基を用いて計算的連続性の定義を書き換えよう．部分関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ あるいは $\Psi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算的連続であるとは，ある枚挙可能集合 $V \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ あるいは $W \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f) \in \{n\} \iff \exists\sigma\ [(\sigma, n) \in V \text{ and } f \in [\sigma]] \qquad \Phi(f) \in [\tau] \iff \exists\sigma\ [(\sigma, \tau) \in W \text{ and } f \in [\sigma]]$$

これはもちろん，観察 3.3 で記述した式と全く同値である．

$$\Phi(f) = n \iff \exists\sigma \sqsubset f.\ (\sigma, n) \in V \qquad\qquad \tau \sqsubset \Phi(f) \iff \exists\sigma \sqsubset f.\ (\sigma, \tau) \in W$$

したがって，全域関数を入力とする汎関数の計算可能性と計算的連続性が同値であることが示された． □

■部分関数を入力とする汎関数: とはいえ，最初に位相的観点の重要性が認識されたのは，全域関数ではなく部分関数を入出力とするような汎関数の研究であったようだ．そのような最初期のアイデアとして，1952 年には，クリーネの有名な教科書「メタ数学入門 (Introduction to metamathematics)」において，部分関数 φ の情報を用いて部分関数 ψ を計算するとは如何なる意味かについて，軽く議論している[*6]．1950 年代中期以降には，汎関数の計算可能性の明示的な定義が与えられている．以下，部分関数全体の集合を $(\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ と書くことにしよう．この記法の意味としては，$\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ とし，部分関数 $f \colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を自然数あるいは未定義 $\uparrow$ を出力とする全域関数 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ と考える，というアイデアに基づく．

部分関数を入力とする汎関数の計算可能性について説明しよう．汎関数 $\Phi \colon (\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の計算は，全域関数の場合と同様，入力関数 f が与えられたとき，計算中で f の有限個の値 $f(n_0), f(n_1), f(n_2), \dots$ にアクセスして，$\Phi(f)$ の値を出力するものである．

$$f(n_0), f(n_1), f(n_2), \dots \quad \overset{\Phi}{\longmapsto} \quad \text{output}$$

ただし，$f(n)$ の値が未定義なことがあり得るので，並列に f の様々な値にアクセスする必要があり，全域関数の場合とは異なり，有限個の値 $f(0), f(1), f(2), \dots$ に順次アクセスするというプロセスに置き換えることはできない．したがって，$\Phi(f)$ の計算プロセスは，f のグラフの有限部分集合を読み込んだ後に出力を返すものである．

少し記法の整理をしよう．有限集合 $D = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ は，有限列 $a_0 a_1 \dots a_n$ と同一の方法でコードされているとする．以下，$[X]^{<\mathbb{N}}$ によって X の有限部分集合全体を表すものとする．関数 f とそのグラフを同一視すれば，有限集合 $D \in [\mathbb{N}^2]^{<\mathbb{N}}$ に対して，包含関係 $D \subset f$ は以下を意味する．

$$D \subset f \iff \forall (a,b) \in D.\ f(a) = b.$$

上述の汎関数 $\Phi(f)$ の計算プロセスは，f のある有限情報 $D \subset f$ を読み込んだ後に出力 $\varphi(D)$ を返すものであると説明できる．

定義 3.7. 部分関数 $\Phi \colon\subseteq (\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が**計算可能** (*computable*) であるとは，ある部分計算可能関数 $\varphi \colon\subseteq [\mathbb{N}^2]^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f) = n \iff \exists D \subset f.\ \varphi(D) = n$$

同様の方法で $\Phi \colon\subseteq (\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の計算可能性を定義できるので，カリー化によって $\Phi \colon\subseteq (\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N} \to (\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ の計算可能性を定義できる．それでは，この位相的性質の分析を始めよう．部分関数を入出力とする汎関数の位相的側面に最初に大きく注目したのは，1955 年のウスペンスキのようである．部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ は，自然数 n, m に対して各 $[n, m] = \{f : f(n) = m\}$ を基本開集合とする準開基を持つ．非常に自然に現れる空間であるが，ウスペンスキが注目するように，この空間はハウスドルフ空間ではないし，T_1 空間ですらない．

---

*6 この議論は 326 頁にある．Shen [?] が指摘するように，クリーネの教科書の索引には，部分再帰汎関数 (partial recursive functional) という項目があり，これは 326 頁を参照しているが，なんと本文中ではそもそも汎関数の概念自体に全く触れておらず，部分再帰汎関数などという用語はどこにも出ていない．おそらくクリーネ自身は，部分関数の情報を用いた部分関数の計算を汎関数として理解していたが，それが文章として書き出されていないということであろう．

定義に従って計算していけば，以前と同様に汎関数の計算可能性の定義 3.7 における φ から計算可能性を取り除いたものとして，汎関数の連続性の概念が得られることを確認できる．

観察 3.8. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ が**連続** (*continuous*) であるとは，ある部分関数 $\varphi\colon\subseteq[\mathbb{N}^2]^{<\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f)=n\iff\exists D\subset f.\ \varphi(D)=n$$

以前と同様に，計算可能性と連続性の結び付きをより広げるためには，関数 φ よりもグラフの枚挙を考えるのがよい．

観察 3.9. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}\to(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が計算可能であるとは，ある枚挙可能集合 $V\subseteq[\mathbb{N}^2]^{<\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^2$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f)(n)=m\iff\exists D\subset f.\ (D,n,m)\in V$$

事実 3.10. 位相空間 X と Y がそれぞれ準開基 $\{A_i\}_{i\in I}$ と $\{B_j\}_{j\in J}$ を持つとき，$\Phi\colon X\to Y$ が連続であるとは，各 $j\in J$ に対して，ある $V_j\subseteq[I]^{<\mathbb{N}}$ が存在して，以下の条件を満たすことである．

$$\Phi(x)\in B_j\iff\exists D\in V_j\,\forall i\in D.\ x\in A_i.$$

定義 3.11. 可算準開基を備えた空間 $(X,\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ と $(Y,\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ に対して，$\Phi\colon X\to Y$ が計算的連続であるとは，ある枚挙可能集合 $V\subseteq[\mathbb{N}]^{<\mathbb{N}}\times\mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することを意味する．

$$\Phi(x)\in B_j\iff\exists D\ [(D,j)\in V\text{ and }\forall i\in D.\ x\in A_i].$$

観察 3.12. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}\to(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が計算可能であることと計算的連続であることは同値である．

Proof. 部分関数 $\Phi\colon\subseteq(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}\to(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が計算的連続であるとは，ある枚挙可能集合 $V\subseteq[\mathbb{N}]^{<\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^2$ が存在して，以下が成立することである．

$$\Phi(f)\in[n,m]\iff\exists D\ [(D,n,m)\in V\text{ and }\forall(a,b)\in D.\ f\in[a,b]]$$

これはもちろん，以下のように観察 3.9 で記述した式と全く同値である．

$$\Phi(f)(n)=m\iff\exists D\subset f.\ (D,n,m)\in V$$

したがって，全域関数を入力とする汎関数の計算可能性と計算的連続性が同値であることが示された． $\square$

歴史的なコメントをしておくと，$(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ 上の計算的連続性の概念の初出はおそらく 1955 年のウスペンスキによるもので，これは枚挙作用素 (enumeration operator) と呼ばれるものに近い．おおよそこのようにして，ウスペンスキは部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ の位相的分析を行い，部分計算可能汎関数と空間 $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ 上の連続性を結び付け，非 T_1 空間（特に非ハウスドルフ空間）の計算論的重要性を明らかにした．

3.2. 数化の理論

より正確な歴史的記述を与えておくと，1950 年代の研究者たちが考察した汎関数の計算可能性の主要な定義は第 3.1 節で扱ったものとは異なる．それ故に，位相的連続性との結び付きの発見はここで記述したよりも遥かに困難であったことに注意しなければならない．当時，汎関数の計算可能性の異なる定義を用いなければならなかった理由については，重要な数学的理由がある．その説明については，第 3.3 節で与えることにして，ここではまず汎関数の計算可能性の定義としてどのようなものを用いていたかについて説明しよう．

当時重要だったものは，部分計算可能関数を入力として自然数を返す汎関数である．以下では，$\mathbb{N}$ 上の部分計算可能関数全体の集合を $[\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ と書くとすれば，$[\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to \mathbb{N}$ という型の汎関数である．定義 3.7 における部分汎関数の計算可能性の定義を思い出すと，入力関数 f の値 $f(n_0), f(n_1), f(n_2), \dots$ を見て，$\Phi(f)$ を計算するプロセスを考えていた．しかし，1950 年代初頭の研究においては，入力関数 $f = \varphi_e$ のプログラムコード e の情報を見て，$\Phi(f)$ を計算するプロセスが重要な役割を持っていた．

$$\text{入力関数 } f \text{ のプログラムコード} \quad \overset{\Phi}{\longmapsto} \quad \text{output}$$

このようなプロセスに特別な名前を付けておこう．

定義 3.13. 関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to \mathbb{N}$ が K_1**-計算可能** (K_1*-computable*) であるとは，ある計算可能関数 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，$\Phi(\varphi_e) = h(e)$ を満たすことである．

つまり，$\varphi\colon \mathbb{N} \twoheadrightarrow [\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ を経由して，計算可能性の定義が与えられていることとなる．

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp]} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{N} \\
\mathbb{N} \arrow[u, two heads, "\varphi"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

記法. ここからは，定義 3.7 の意味で計算可能であることを K_2**-計算可能** (K_2*-computable*) と呼ぶことにする．$\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2$ の意味は何であるかと思うかもしれないが，ここからは複数の異なる計算可能性の定義を同時に扱うので，それらを区別するための記号だと思ってもらってよい．$\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2$ という用語は，クリーネの第一代数，クリーネの第二代数に由来する．

K_1-計算可能性と K_2-計算可能性の定義の違いには注意しておこう．もちろん，入力 $f = \varphi_e$ のプログラムコード e の情報があれば，そのプログラムを実行することによって $f(n_0), f(n_1), f(n_2) \dots$ の情報を利用することができるから，K_2-計算可能ならば，K_1-計算可能である．しかし，逆については，$f(n_0), f(n_1), f(n_2) \dots$ の有限個の情報を見たところで，f を計算するプログラムコードが何であるかを予測することは不可能である．

K_1-計算可能性は，汎関数の計算可能性をコード上の計算可能性に落とし込むことによって定義されたものである．同様のアイデアによって，汎関数だけでなく，様々な写像 $f\colon X \to Y$ に対して，もし X と Y の元が自然数によってコードされていれば，f の計算可能性について議論することができる．つまり，自然数によるコード化を経由すれば，様々な数学的対象に対する計算論を展開することができる．このアイデアの重要性は，1954 年にコルモゴロフによって指摘され[*7]，1955 年に彼の学生ウスペンスキによって発表された [?]．こ

[*7] ウスペンスキの回想「コルモゴロフと数理論理学 (Kolmogorov and mathematical logic [?])」によれば，1954 年 2 月のコル

れが現在，数化と呼ばれるものである．

定義 3.14. 集合 X の**数化** (*numbering*) とは，部分全射 $\nu\colon \subseteq \mathbb{N} \twoheadrightarrow X$ である．ν が全域写像の場合には，全域数化と呼ぶ．数化を備えた集合 (X,ν) を**数化集合** (*numbered set*) と呼ぶ．$\nu(e) = x$ であるとき，e を x のコードと呼ぶ．

例 3.15. 標準的な計算論で頻繁に用いられる全域数化は，部分計算可能関数の数化 $(\varphi_e)_{e\in\mathbb{N}}$ と枚挙可能集合の数化 $(W_e)_{e\in\mathbb{N}}$ である．

(1) 恒等写像は $\mathbb{N}$ の全域数化 $\mathrm{id}\colon \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ を与える．
(2) 部分計算可能関数の枚挙 $\varphi\colon e \mapsto \varphi_e$ は，全域数化 $\varphi\colon \mathbb{N} \twoheadrightarrow [\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ を与える．
(3) 補題 2.3 の枚挙可能性と認識可能性の同値性を思い出し，枚挙可能集合 $W_e = \{n : \varphi_e(n)\downarrow\}$ を考える．このとき，$W\colon e \mapsto W_e$ は枚挙可能集合全体の全域数化を与える．
枚挙可能集合全体は $\mathbb{N} \twoheadrightarrow [\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} 1_\perp]$ と同一視できることにも注意しておこう．

例 3.16 (シエルピンスキ空間)**.** 計算可能性理論において，計算の「停止」と「非停止」の概念は重要である．いま，集合 $\mathbb{S} = \{\top, \perp\}$ に対して，以下の全域数化を与えよう．

$$e \text{ は } \top \text{ のコード} \iff \varphi_e(0)\downarrow \qquad\qquad e \text{ は } \perp \text{ のコード} \iff \varphi_e(0)\uparrow$$

この数化集合 $\mathbb{S}$ を K_1-**シエルピンスキ空間** (K_1-*Sierpiński space*) と呼ぶことにする．

定義 3.17. 数化集合 $(X,\nu_X),(Y,\nu_Y)$ に対して，写像 $f\colon X \to Y$ が K_1-**計算可能** (K_1-*computable*) であるとは，$x \in X$ のコードを $f(x) \in Y$ のコードへと変換する計算可能関数 ψ が存在することを指す．つまり，$f(\nu_X(e)) = \nu_Y(\psi(e))$ を満たすことである．

K_1-計算可能性の定義を図式的に表せば，以下のようなものになる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \mathbb{N} \arrow[u, two heads, "\nu_X"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{N} \arrow[u, two heads, "\nu_Y"'] \end{tikzcd}$$

このとき，ψ は f をコード上計算すると言うことにする．入力側として部分計算可能関数の数化 $\varphi\colon \mathbb{N} \twoheadrightarrow [\mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{eff}} \mathbb{N}_\perp]$，出力側として自明な数化 $\mathrm{id}\colon \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{N}$ を考えることによって，定義 3.13 は定義 3.17 の特別な場合であるとみなすことができる．シエルピンスキ空間は，枚挙可能集合を表すために用いることができる．

観察 3.18. $A \subseteq \mathbb{N}$ が枚挙可能であることと $\chi_A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ が K_1-計算可能であることは同値である．

Proof. 補題 2.3 より，枚挙可能性と認識可能性は同値であるから，認識可能性を利用すればよい． □

モゴロフによるセミナートークを起源とする．ウスペンスキによれば，数化の理論の研究の源は，1938 年のクリーネの順序数記法であった．そうだとするならば，数化の理論は誕生時点から全域数化ではなく部分数化が主要な対象だったことになる．また，コルモゴロフのトークの時点で，数化の間の翻訳の概念も導入されていたようだ．

例 3.19 (指数対象)**.** 数化集合 X, Y に対して，X から Y への K_1-計算可能関数全体を $[X \xrightarrow{\text{eff}} Y]$ と書く．このとき，K_1-計算可能関数は以下のようにコード化可能である．

$$e \text{ が } f\colon X \to Y \text{ のコードである} \iff \varphi_e \text{ は } f \text{ をコード上計算する．}$$

すべての φ_e が何らかの関数 $f\colon X \to Y$ のコード上の計算となっているとは限らないので，必ずしも全域数化とは限らないことに注意する．

注意. 以後，しばしば数化集合 $[X \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{S}]$ を考えるが，例 3.19 と組み合わせると，e が $f\colon X \to \mathbb{S}$ のコードであるとは，$x \in X$ の任意のコード d に対して，$\varphi_e(d)$ が $f(x) \in \mathbb{S}$ のコードである，すなわち以下の条件を満たすことである．

$$f(x) = \top \iff \varphi_{\varphi_e(d)}(0)\downarrow \qquad\qquad f(x) = \bot \iff \varphi_{\varphi_e(d)}(0)\uparrow$$

しかし，これは無駄に冗長である．そこで，代わりにこの $\varphi_{\varphi_e(d)}(0)$ を $\varphi_e(d)$ に取り替えたコード化を考えることにする．つまり，e が $f\colon X \to \mathbb{S}$ のコードであるとは，$x \in X$ の任意のコード d に対して，以下の条件を満たすことである．

$$f(x) = \top \iff \varphi_e(d)\downarrow \qquad\qquad f(x) = \bot \iff \varphi_e(d)\uparrow$$

この補正を経由して，$\mathbb{N}$ の枚挙可能部分集合全体は $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{S}]$ と同一視できる．

■計算的連続性: 数化の概念を用いて，定義 3.11 の計算的連続性について理解を深めてみよう．まず，位相空間の基本的な概念について復習しよう．

- 位相空間 X が開基 $\{B_i\}_{i \in I}$ を持つとき，$U \subseteq X$ が開集合であるとは，ある $V \subseteq I$ に対して，$U = \bigcup_{i \in V} B_i$ と書けることである．
- 位相空間 X, Y の間の写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるとは，任意の開集合 $U \subseteq Y$ に対して $f^{-1}[U] \subseteq X$ が開であることを指す．

開集合の概念の計算論版として，枚挙可能開集合の概念が知られている．枚挙可能開集合の概念の初出は不明だが，全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ においては，遅くとも 1954 年のアディソン [?] が本質的に同様の概念を扱っている．ユークリッド空間においては，計算可能解析学の研究の中で 1957 年に Lacomb [?] が導入している．

定義 3.20. 可算開基を備えた位相空間 $(X, \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ の集合 $U \subseteq X$ が**枚挙可能開** (*enumerably open*) であるとは，ある枚挙可能集合 $V \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，$U = \bigcup_{i \in V} B_i$ と書けることである．

明らかに $e \mapsto U_e^X := \bigcup_{i \in W_e} B_i$ によって枚挙可能開集合全体の数化を与えることができる．以後は，$\mathsf{Enum}\, X$ によって枚挙可能開集合全体を表すとする．以下のように，計算的連続性は，位相的連続性の K_1-計算可能版として捉えることもできる．

命題 3.21. 可算開基を備えた位相空間 $(X, \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}), (Y, \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ について，写像 $f\colon X \to Y$ が計算的連続であることと $f^{-1}\colon \mathsf{Enum}\, Y \to \mathsf{Enum}\, X$ が K_1-計算可能であることは同値である．

Proof. (⇒) f が計算的連続ならば，ある枚挙可能集合 V が存在して，$f^{-1}[B_j] = \bigcup\{A_i : (i,j) \in V\}$ と書ける．したがって，プログラム e に対して，以下の枚挙可能集合 $W_{p(e)}$ を考える．

$$W_{p(e)} = \{i \in \mathbb{N} : \exists j\ [j \in W_e \text{ and } (i,j) \in V]\}.$$

このとき，$f^{-1}[U^Y_e] = \bigcup_{j \in W_e} f^{-1}[B_j] = \bigcup_{i \in W_{p(e)}}[A_i] = U^X_{p(e)}$ であるから，p は f^{-1} をコード上で計算する．

(⇐) 逆に，p が f^{-1} をコード上計算するアルゴリズムであれば，特に $W_{s(j)} = \{j\}$ に対して，$f^{-1}[B_j] = U^X_{p(s(j))} = \bigcup\{A_i : i \in W_{p(s(j))}\}$ を得る．よって，枚挙可能集合 $V = \{(i,j) : i \in W_{p(s(j))}\}$ を考えればよい． □

■シエルピンスキ空間: 例 3.16 の停止と非停止の空間こと K_1-シエルピンスキ空間は，計算可能性理論における極めて根源的な空間である．K_1-シエルピンスキ空間 $\mathbb{S}$ を始域とする関数 $f\colon \mathbb{S} \to X$ に対して一点コメントしておこう．関数 $f\colon \mathbb{S} \to X$ が K_1-計算可能であるということは，停止するプログラムを $f(\top)$ のコードに変換し，停止しないプログラムを $f(\bot)$ のコードに変換するアルゴリズムが存在することを意味する．したがって，停止問題の計算不可能性は，以下の性質を意味する．

- 任意の K_1-計算可能関数 $f\colon \mathbb{S} \to 2$ は定数関数である．

ところで，位相空間に関する以下の基本的概念がある．

定義 3.22. 位相空間 X が**連結** (*connected*) であるとは，任意の連続関数 $f\colon X \to 2$ が定数関数であることである．

計算可能性と連続性が類似していたことを思い返せば，停止問題の計算不可能性は K_1-シエルピンスキ空間 $\mathbb{S}$ の連結性を表しているように見える．さて，ここでシエルピンスキ空間という我々の用語の由来を説明しよう．位相空間論におけるシエルピンスキ位相とは，離散位相でも密着位相でもない 2 点集合 $\{\top, \bot\}$ 上の位相である．つまり，一方の点 $\{\top\}$ は開であるが，もう一方の点 $\{\bot\}$ は開ではない．そして，この位相空間は以下の性質を持つ．

- シエルピンスキ空間は連結空間である．

もちろんこれは位相空間論におけるシエルピンスキ空間のことであり，K_1-シエルピンスキ空間の話ではない．そもそも K_1-シエルピンスキ空間はただの数化集合であって，位相空間ではないのだから，連結か否かを議論するのはナンセンスであるように思える．しかし，実は数化集合の位相的性質について議論する方法があるのである．

■エルショフ位相: 数化集合自体は位相空間ではないが，数化集合 X には常に位相を入れることができ，後の時代にはそれはエルショフ位相と呼ばれることとなる．位相空間的なアイデアを述べれば，数化を商写像のようなものだと考え，数化集合に商位相を入れるというものであるが，もちろん $\mathbb{N}$ は離散空間なのでこのアイデア単体はほとんど意味をなさない．この商位相のアイデアに計算論を組み込んで意味を与えるものが，エルショフ位相である．

定義 3.23. 全域数化集合 (X,ν) の部分集合 $U \subseteq X$ がエルショフ位相に関して枚挙可能開集合であるとは，U の元のコード全体の集合 $\{e \in \mathbb{N} : \nu(e) \in U\}$ が枚挙可能であることを意味する．枚挙可能開集合たちを開基とする位相を**エルショフ位相** (*Ershov topology*) と呼ぶ.

部分数化集合に対してもエルショフ位相を与える方法もあるが，ここでは扱わない.

例 3.24 (シエルピンスキ空間と停止問題). 例 3.16 の K_1-シエルピンスキ空間 $\mathbb{S}$ を考えると，$\{\top\}$ のコード集合は停止するプログラム全体であるから，枚挙可能である．一方，$\{\bot\}$ のコード集合は停止しないプログラム全体であるが，停止問題の計算不可能性より，これは枚挙不可能である．以上より，$\mathbb{S}$ 上のエルショフ位相は，$\emptyset, \{\top\}, \{\top,\bot\}$ を開とする位相であり，すなわちシエルピンスキ位相と一致し，特に連結空間である.

もちろん $\{\bot\}$ が枚挙可能でないことが，まさに停止問題の計算不可能性に相当するのであったから，これは停止問題の計算不可能性の位相的な意味を我々に教えてくれるものである.

$$\text{停止問題の計算不可能性} \iff \mathbb{S}\ \text{上のエルショフ位相がシエルピンスキ位相と一致する.}$$

さて，前節では，K_2-計算可能性と計算的連続性の関連性について述べたが，次は K_1-計算可能性と計算的連続性の関連性に関する理解を深めたい．このために，まず，エルショフ位相に関する計算的連続性の概念を導入しよう．既に定義 3.11 において，可算開基を持つ空間における計算的連続性の定義を与えたと思うかもしれないが，エルショフ位相の困難点は，何が枚挙可能開集合か分からないので，開基の計算可能な枚挙が与えられていないという点である．言い換えれば，数化集合 (X,ν) のエルショフ位相における枚挙可能開集合全体 $\mathsf{Enum}_1 X$ の数化 $U^X : e \mapsto U^X_e$ は，全域数化ではなく部分数化である.

$$U^X_e\downarrow \iff W_e\ \text{が添字集合である} \iff (\exists U \subseteq X)\ W_e = \nu^{-1}[U].$$

さて，集合 $U \subseteq X$ を考える際に特性関数 $\chi_U : X \to 2$ を扱った方が見通しがよくなる場合がある．特に開集合 U は，シエルピンスキ空間値特性関数 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ を対応付けられる．ここで，$x \in U$ ならば $\chi_U(x) = \top$ であり，$x \notin U$ ならば $\chi_U(x) = \bot$ である.

観察 3.25. 位相空間 X の部分集合 $U \subseteq X$ が開集合であることと $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ が連続関数であることは同値である.

数化集合 X に対しては，集合 $U \subseteq X$ が枚挙可能開であることと特性関数 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ が K_1-計算可能であることの対応が付けられる．実際，以下の命題のように，U の枚挙のコードを χ_U の K_1-計算のコードに変換するアルゴリズムと，その逆操作を行うアルゴリズムが存在する.

命題 3.26. 任意の数化集合 X に対して，$\mathsf{Enum}_1 X \simeq [X \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{S}]$ が成立する.

Proof. これは枚挙可能開集合 $U \subseteq X$ が K_1-計算可能特性関数 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ と対応するという主張である．枚挙可能開集合 $U = U^X_e$ が与えられたとき，$W_e = \{d : \nu(d) \in U\}$ である．d が x のコードならば，以下が成立する.

$$\chi_U(x) = \top \iff x = \nu(d) \in U \iff d \in W_e \iff \varphi_e(d)\downarrow$$

つまり，$x \in X$ のコード d が与えられたとき，$\varphi_e(d)$ の状態が $\chi_U(x) \in \mathbb{S}$ と一致するので，φ_e が χ_U をコード上計算する．以上より，U のコード e は χ_U のコードでもある．

逆に，K_1-計算可能関数 $f\colon X \to \mathbb{S}$ が与えられたとき，$U = \{x \in X : f(x) = \top\}$ とすると，明らかに $f = \chi_U$ である．φ_e を f のコード上の計算とすれば，

$$\varphi_e(d)\downarrow \iff \chi_U(\nu(d)) = \top \iff \nu(d) \in U$$

であるから，$W_e = \{d : \nu(d) \in U\}$ となるので，U は枚挙可能開集合であり，$f = \chi_U$ のコード e は U のコードでもある． □

命題 3.21 を参考にすれば，エルショフ位相における計算的連続性の定義は $f^{-1}\colon \mathsf{Enum}_1\, Y \to \mathsf{Enum}_1\, X$ の K_1-計算可能性として導入するのが妥当であろう．つまり，エルショフ位相において，枚挙可能開集合 U のコードが入力されたとき，枚挙可能開集合 $f^{-1}[U]$ のコードを出力するプログラムが存在する．

命題 3.27. 数化集合 X, Y に対して，K_1-計算可能関数 $f\colon X \to Y$ は，エルショフ位相に対して計算的連続である．つまり，$f^{-1}\colon \mathsf{Enum}_1\, Y \to \mathsf{Enum}_1\, X$ は K_1-計算可能である．

Proof. 以後は，枚挙可能集合 $U \subseteq Y$ と特性関数 $\chi_U\colon Y \to \mathbb{S}$ を同一視することにすれば，$f^{-1}[U] = U \circ f$ である．つまり，$f^{-1} = \lambda U.U \circ f$ であり，K_1-計算可能関数 $U\colon Y \to \mathbb{S}$ と $f\colon X \to Y$ の合成とカリー化の組み合わせなので，これは K_1-計算可能である． □

さて，逆も成り立つであろうと予測したいところであるが，無条件には，計算的連続性から K_1-計算可能性を導くのは困難である．ここでは特別な場合のみ議論しよう．

命題 3.28. 関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ がエルショフ位相に対して計算的連続ならば．Φ は K_1-計算可能である．

Proof. まず，$[n, m] = \{g : g(n) = m\}$ は $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ のエルショフ位相の下で開である．なぜなら，$[n, m]$ のコード集合は $\{e : \varphi_e(n) = m\}$ であるが，これは明らかに枚挙可能であり，その認識関数のコード $a(n, m)$ も容易に計算できる．この $a(n, m)$ は $[n, m]$ のコードでもある．Φ の計算的連続性の仮定より，$\Phi^{-1}[n, m] = \{f : \Phi(f) \in [n, m]\}$ のコード $b(a(n, m))$ を計算できる．これは $\Phi^{-1}[n, m]$ のコード集合 $\{e : \Phi(\varphi_e)(n) = m\}$ の認識関数 $\varphi_{b(a(n,m))}$ を与える．

それでは，Φ が K_1-計算可能であることを示そう．e を入力 f のコードとする．出力 $\Phi(f)$ を計算するためのプログラム $c(e)$ は，入力 n に対して，以下の計算を行う．

(1) $\varphi_{b(a(n,m))}(e)\downarrow$ となる m が現れるのを待つ．
(2) そのような m が見つかったら，この m を出力する．

(1) が発生するということは，$\Phi(\varphi_e)(n) = m$ を意味するが，このとき，(2) の動作によって $\varphi_{c(e)}(n) = m$ が与えられる．よって，$\Phi(f) = \Phi(\varphi_e) = \varphi_{c(e)}$ を得るので，$c(e)$ は $\Phi(f)$ を正しく計算するプログラムコードである．以上より，Φ が K_1-計算可能であることが示された． □

3.3. ライスの定理

1950 年代の多くの研究者たちが K_2-計算可能性ではなく K_1-計算可能性を用いた理由について述べるためには，1952 年のライスの博士論文「再帰的枚挙可能集合とその決定問題 (Classes of recursively enumerable sets and their decision problems)」に遡る必要がある．そこで示されたものが，いわゆるライスの定理である．

以下では，φ_e を e 番目の部分計算可能関数とする．$A \subseteq \mathbb{N}$ が添字集合であるとは，部分計算可能関数の集合 $F_A \subseteq (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が存在して，$A = \{e \in \mathbb{N} : \varphi_e \in F_A\}$ と書けることを指す．

定理 3.29 (ライスの定理)**.** 添字集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，もし $\varnothing \subsetneq A \subsetneq \mathbb{N}$ ならば，A は計算不可能である．

ライスの定理は，様々な計算不可能性定理を導くための親玉のような定理であり，非常に有名であるが，しかし，一体どのように部分関数の空間の位相と関わってくるだろうか．これについて説明するために，ライスの定理を少し別の観点から眺めてみよう．まず，A が計算不可能であるとは，特性関数 $\chi_A \colon \mathbb{N} \to 2$ が計算不可能であることに注意し，さらに A よりも F_A に注目してみよう．ライスの定理を言い換えると，おおよそ以下のようなものである．

- 非自明な $F_A \subseteq [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ に対して，特性関数 $\chi_{F_A} \colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to 2$ が K_1-計算不可能である．

一応，K_2-計算可能性ではなく K_1-計算可能性を扱っているという点には注意しておこう．

議論 (ライスの定理の言い換え)**.** ライスの定理の主張は「もし $\varnothing \subsetneq F \subsetneq [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ ならば，χ_F は K_1-計算不可能である」ということとして言い換えることができる．これは「χ_F が定数関数でないならば，χ_F は K_1-計算不可能である」と言っても同値である．対偶を取れば，

- 任意の K_1-計算可能関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to 2$ は定数関数である．

停止問題の計算不可能性の位相的解釈の際にも，類似の性質を見たはずだ，位相空間 X が連結であるとは，任意の連続関数 $f\colon X \to 2$ が定数関数であることであった．

議論 (ライスの定理の位相的証明案)**.** 部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が連結空間であることは容易に確認できる．部分空間 $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \subseteq (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ を考えても連結であることは容易に示せるので，つまりはライスの定理を知らずとも，純粋に位相的な議論から以下の主張を示すことができる．

- 任意の連続関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to 2$ は定数関数である．

定義 3.11 の意味で計算的連続ならば連続なので，特に，任意の計算的連続関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to 2$ は定数関数である．したがって，前節の議論より，

- 任意の K_2-計算可能関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to 2$ は定数関数である

ということが，計算論を全く用いずに，位相的議論から証明できたことになる．このようにして，純粋に位相的な議論からライスの定理を導けたように見えるが，本当にそうだろうか．

残念ながら，この議論には少しの欠陥がある．K_1-計算可能性と K_2-計算可能性が一致するか否かは全く明らかではないのだ．

我々が理解したいものは，K_1-計算可能性と位相がどのように関連するか，という点である．いま，観測 3.9 の後に導入した $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ 上の位相を標準位相と呼ぶことにする．同様に，標準位相による部分空間 $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \subseteq (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ の位相のことも標準位相と呼ぶことにする．ここでエルショフ位相と標準位相が如何なる関係にあるかを知ることが重要である．我々は，$[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ が標準位相の下で連結であることを知っているから，もしエルショフ位相と標準位相が同じものだということを示せれば，$[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ はエルショフ位相の下でも連結であると分かる．命題 3.27 より，この位相的事実だけから，ライスの定理は導かれる．

歴史的には，エルショフ位相と標準位相の同値性の問題は，ライスの博士論文（のジャーナル版）において予想として提示されたものである．より正確には，ライス予想は $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ ではなく枚挙可能集合の空間 $[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} 1_\perp]$ に関するものであり，さらに位相の言葉は一切用いていない．この種の計算論的研究において位相的手法が有効であると認識され始めたのは 1950 年代末頃からであり，1950 年代前半のライスには知る由も無かったことであろう．この手の研究で活躍する位相は，非ハウスドルフ位相どころか非 T_1-位相であったのだから無理もないことである．この時代だと，ほとんどの人は非 T_1-位相の重要性にまだ気づいていなかったのだ[*8].

ともあれ，エルショフ位相と標準位相の同値性に関するライス予想は，1954 年頃に数多くの人によって独立に証明され，1956 年のライスの論文「完全再帰的枚挙可能クラスとその鍵配列 (On completely recursively enumerable classes and their key arrays)」において発表された．現在，この定理はライス-シャピロの定理 (Rice-Shapiro theorem) として知られるが，定理名に含まれているライスとシャピロ以外にも，マクノートン，マイヒル，ウスペンスキが同時期に証明をしていたようだ[*9].

定理 3.30 (ライス-シャピロの定理). $U \subseteq [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ がエルショフ位相に関して枚挙可能開集合であることと標準位相に関して枚挙可能開集合であることは同値である．

Proof. 標準位相で枚挙可能開ならばエルショフ位相でも枚挙可能開であることは，標準位相における基本開集合 $\{f : f(n)\downarrow = m\}$ が枚挙可能集合 $\{e : \varphi_e(n)\downarrow = m\}$ に対応するためである．実際，$\{(e,n,m) : \varphi_e(n)\downarrow = m\}$ が枚挙可能なので，これを利用すればよい．

次に，エルショフ枚挙可能開集合が標準位相で枚挙可能開であることを示したいが，まずは枚挙可能性を一旦置いておき，単純な位相の比較を行ってみよう．

主張. エルショフ開集合は標準位相に関して開である．

Proof. これはつまり U がエルショフ枚挙可能開集合であるとき，任意の $f \in U$ に対して，ある有限関数 $f_0 \subseteq f$ が存在して，f_0 を拡張する任意の部分計算可能関数が U に属すことを意味する．仮定より，U の添字集合 $I_U = \{e : \varphi_e \in U\}$ は枚挙可能である．与えられた $f = \varphi_e \in U$ に対して，再帰定理を用いて，各 d 毎に以下のアルゴリズム φ_p を構成する．

(1) 自身のコード p が I_U に並ぶまでは，φ_e の計算をシミュレートする．

---

*8 たとえば，領域理論 (domain theory) が誕生するのは 1960 年代末から 1970 年代初頭にかけてのことである．実際，領域理論の誕生はより高階の汎関数の計算論の研究と深く関わっている．

*9 ちなみにライスは，マクノートンの未出版草稿を主として参照し，マイヒルの 1954 年の記号論理学会年会における講演アブストラクトを注釈で参照，シャピロについては注釈で名前を触れているのみである．米国で研究する彼らは 1955 年のウスペンスキのロシア語の論文は認識していない．なぜライス-シャピロの定理という名称が定着したのかという歴史的背景は不明である．

(2) 自身のコード p が I_U に並んだら，その時点で停止していないすべての計算について，以後もずっと未停止状態を継続する．

もし $p \notin I_U$ ならば，(1) の動作より $\varphi_p = \varphi_e \in U$ であるから，これはあり得ない．したがって，$p \in I_U$ であるが，これは有限ステップで認識されるから，その時点では φ_e の有限個の計算しかシミュレートできないので，φ_p はその時点では有限個の入力のみで停止する有限関数である．しかし，(2) の動作より，それ以降の時刻では，どの入力に対する計算も停止状態に入らないので，φ_p は有限関数である．

次に，φ_p を拡張する任意の計算可能関数が U に属することを示そう．先程と同様に，再帰定理を用いて，以下のアルゴリズム $\varphi_{q(d)}$ を構成する．

(1) 自身のコード $q(d)$ が I_U に並ぶまでは，φ_p の計算をシミュレートする．
(2) 自身のコード $q(d)$ が I_U に並んだら，その時点で停止していない各計算 $\varphi_{q(d)}(n)$ について，$\varphi_d(n)$ の計算をシミュレートする．

いま，φ_d を φ_p の任意の拡張とする．もし $q(d) \notin I_U$ ならば，(1) の動作より $\varphi_{q(d)} = \varphi_p \in U$ であるから，これはあり得ない．したがって，$q(d) \in I_U$ であるが，これが認識された時点では，$\varphi_{q(d)}$ は φ_p の部分関数である．$\varphi_p \subseteq \varphi_d$ であることから，(2) の動作は $\varphi_{q(d)} = \varphi_d$ を保証する．以上より，$\varphi_d = \varphi_{q(d)} \in U$ を得た． □

それでは，定理の証明を与えよう．エルショフ枚挙可能開集合 U が与えられたとき，その添字集合 I_U は枚挙可能である．各有限関数 $D \in [\mathbb{N}^2]^{<\mathbb{N}}$ を計算するプログラムコード $e(D)$ は容易に見つかる．したがって，$V = \{D : e(D) \in I_U\}$ もまた枚挙可能であり，上の主張より，

$$f \in U \iff \exists D \in V.\ D \subseteq f$$

であることが分かる．$\{f : D \subseteq f\}$ は標準位相における基本開集合の有限共通部分であり，V が枚挙可能であることから，これは U が標準位相において枚挙可能開集合であることを導く． □

定理 3.30 より，$[\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ はエルショフ位相においても連結であることが分かるので，これよりライスの定理 3.29 が導かれる．

次は，K_1-計算可能性と K_2-計算可能性が如何なる関係にあるかについて理解したい．

定理 3.31 (マイヒル-シェファードソンの定理)**.** 関数 $\Phi\colon [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N} \xrightarrow{\text{eff}} \mathbb{N}_\perp]$ が K_1-計算可能であることと K_2-計算可能であることは同値である．

Proof. 命題 3.27 と 3.28 より，Φ が K_1-計算可能であることとエルショフ位相に関して計算的連続であることは同値である．後者は，エルショフ枚挙可能開集合 U のコードをエルショフ枚挙可能開集合 $\Phi^{-1}[U]$ のコードに変換するアルゴリズムが存在することを意味する．ライス-シャピロの定理 3.30 より，標準位相とエルショフ位相における枚挙可能開集合のコードは互いに変換可能である．命題 3.21 より，この条件は標準位相に対して計算的連続であることと同値である．観察 3.12 より，これは Φ が K_2-計算可能であることを意味する． □

この定理は，1955 年にマイヒル-シェファードソンが出版した論文「部分再帰関数上の実効作用素 (Effective operations on partial recursive functions)」において証明が与えられている．歴史的な注釈を加えておくと，本

稿の K_1-計算可能関数は，彼らの論文の題目にあるように，伝統的には実効作用素と呼ばれている．また，独立に同時期にウスペンスキも同様の定理を発表している．

本稿では位相的側面を強調した記述を行ったが，1950 年代中旬の時点で既に位相を強調していたのは，ここに紹介した研究者たちの中ではウスペンスキのみであったようだ．ただし，1955 年のウスペンスキの一連の論文はロシア語で執筆されている上に翻訳もなされず，さらに証明も省略されていた．ウスペンスキの博士論文には証明が含まれているようであるが，これもロシア語で執筆されていたため，国際的な計算可能性理論研究への影響は僅少であった．後世に影響を与えたのは，英語で執筆された論文群であり，このために，ライス-シャピロの定理にもマイヒル-シェファードソンの定理にも，ウスペンスキの名前は含まれていない．

■実数の計算論: ここでは全域関数 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ の空間と部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ を扱ったが，それ以外の空間上の関数の計算可能性も議論されていた．代表的なものでは，$\mathbb{R}$ 上の計算可能性などである．実関数の計算可能性の萌芽的なアイデアは上述の通り 1912 年のボレルも言及しているが，実数の計算可能性の最初の厳密な研究は 1936 年のチューリングの論文「計算可能数とその決定問題への応用 (On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem)」から始まった．この論文で，チューリングは，実数の計算可能性のみならず，実数列や実関数列の収束の計算可能性についても議論し，単調関数に対する中間値の定理の計算可能性なども示している．

しかし，ボレルとは異なり，チューリングは 1936 年の段階では，計算可能性と連続性の結び付きを認識しておらず，それ故に実数に対する不適切な計算論的取り扱いをしていた．チューリングは 1938 年に訂正版を出版し，実数は無限小数展開ではなく符号付き無限小数展開で表すべきであると述べている．現代的な観点からは，これは $\mathbb{R}$ 上の計算可能性の定義に位相的な誤りがあったものを補正したものであるとみなすことができる．無限小数表記は，記号列から実数への全射 $A^\mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ であると考えることができる．簡単のために，区間 $[0,1]$ 内の実数の 2 進小数展開を考えることにする．

$$\mathsf{bin}\colon \{0,1\}^\mathbb{N} \twoheadrightarrow [0,1] \qquad\qquad \mathsf{signed\text{-}bin}\colon \{-1,0,1\}^\mathbb{N} \twoheadrightarrow [0,1]$$

これらを記号列の空間から区間 $[0,1]$ への商写像と考えたとき，$[0,1]$ 上の商位相が与えられる．このとき，符号付き 2 進表記 signed-bin は $[0,1]$ 上にユークリッド位相を与えるのに対し，通常の 2 進表記 bin は $[0,1]$ 上に全く異なる位相を与えてしまう．この意味で，符号付き 2 進表記はユークリッド位相と両立する実数の表記であり，2 進表記はユークリッド位相と非整合的な実数の表記であると言える．

チューリングがこの位相的側面を認識していたかは定かではないが，あくまで計算論的分析から，実数の 2 進表記は計算論には不適切であり，符号付き 2 進表記が計算論的に適切であると 1938 年に辿り着いたのである．このように，計算論的な妥当性を考慮すると，実際には位相的な妥当性が自動的に導かれるのである．

チューリングの実数の計算論は，1937 年にはバナッハとその弟子マズールによる注目を浴び，彼らは実関数の計算可能性概念の最初の体系的研究を行ったようであるが，第二次世界大戦の影響で公表が大きく遅れ，実数の計算論は少しの休眠期間に入る．実数の計算論の研究は，おそらく 1949 年，スペッカーの論文「構成的に証明できない解析学の命題 (Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der analysis)」によって再開される．そして 1950 年代中頃からは，計算可能解析学（および構成的解析学）が急速に発展し始め，1950 年代末には完備距離空間の計算可能性理論が整備されていった．

部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ は，当時はその位相的な性質に未知な部分が多かったが，全域関数の空間 $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ やユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ は完備可分距離空間である．1959 年 Ceĭtin は計算可能完備距離空間上の計算可能関数の連

続性[*10]を示し，それを全域関数を入力とする K_1-計算可能汎関数の連続性[*11]を得るために応用した．これによって，全域関数を入力とする汎関数の計算論と実数上の計算論が合流することとなる．しかし，部分関数を入力とする汎関数の計算論まで統合するような適切な理論的枠組みは，当時は全く定かではなかった．

3.4. 相対化原理

このように，計算と位相には深い関連性があると人々に徐々に認識され始めた．少し歴史を遡ると，クリーネの学生アディソンは，1954 年に博士論文「再帰関数論の幾つかの要点について (On some points of the theory of recursive functions)」を書き上げ，算術的階層とボレル階層の完璧な対応を得ていた．したがって，計算と位相の対応は，アディソンの対応の第 1 階層として既にあったものである．ただし，アディソンの第 1 階層に対応する概念は K_2-計算可能性であって K_1-計算可能性ではない．また，1950 年代のアディソンは，ボレル階層や射影階層に重きを置いており，計算可能性と連続性の対応にはそこまで関心を払っていなかったようだ．本節では，単に計算可能と言った場合，K_2-計算可能のことであるとする．

アディソンの研究成果は「完璧な対応」として称賛されたが，その鍵となるものは，相対化原理である．1959 年の論文「古典および実効記述集合論の階層における分離原理 (Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory)」で提示されているアディソンの原理[*12]によれば，$P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が開かつ閉であることと，ある $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を用いて計算可能であることは同値である．少し分かりづらいが，アディソンの原理を少し補正すると，たとえば以下の相対化原理を導くことができる．

定理 3.32 (相対化原理)**.** 関数 $F\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が連続であることと，ある計算可能関数 $\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ および関数 $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在して，以下が成立することは同値である．

$$\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.\ \Phi(f, g) = F(f)$$

この定理の証明は後ですぐに与える．相対化原理を一言で述べれば，以下の等式である．

$$\text{連続性} = \text{パラメータ付き計算可能性}$$

先程述べたように，アディソンは計算可能性と連続性の対応に関心を払っていないためか，あるいは自明であると考えていたためかによって，明示的には定理 3.32 のような記述を与えていない．アディソンの主たる関心は，相対化原理をボレル階層や射影階層に持ち上げ，ボレル階層や射影階層の手法を計算可能性理論に持ち込むことであった．

アディソンの対応について述べるために，定義 3.20 の枚挙可能開集合について思い出そう．ただし，アディソンの重要な観点は，枚挙可能開集合単体ではなく，パラメータによる相対化を考えることであった．認識可能性/枚挙可能性の概念を関数 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に相対化しよう．

(1) 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が f-認識可能であるとは，ある計算可能関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，$A = \{n \in \mathbb{N} : \Phi(f, n)\downarrow\}$ と書けることである．

[*10] 特に実数上の計算可能性の場合には，1912 年のボレルの観測に類似しているが，ボレルの計算可能性の定義は非厳密であるものの K_2-計算可能性にアイデアが近い．一方，1959 年の Ceĭtin の定理は K_1-計算可能性を扱うため，遥かに非自明なものである．
[*11] 全域関数を入力とする K_1-計算可能汎関数の連続性については，1957 年に Kreisel-Lacomb-Shoenfield も証明を宣言していた．
[*12] 既に 1954 年の博士論文で提示されているかもしれないが，未確認である．

(2) 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が f-枚挙可能であるとは，ある計算可能関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，$A = \{\Phi(f,n) : n \in \mathbb{N}\}$ と書けることである．

クリーネの補題 2.3 は，任意のパラメータに相対化することができ，f-認識可能性と f-枚挙可能性が同値であることを示すことができる．

定義 3.33. 可算開基を備えた位相空間 $(X, \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ の集合 $U \subseteq X$ が f-枚挙可能開集合であるとは，ある f-枚挙可能集合 $V \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，$U = \bigcup_{i\in V} B_i$ と書けることである．

実際にアディソンが扱ったものは，全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と開基 $([\sigma])_{\sigma\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ である．

命題 3.34 (相対化原理)**.** 可算開基を備えた位相空間 $(X, \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ の集合 $U \subseteq X$ が開集合であることと，ある $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，f-枚挙可能開集合であることは同値である．

Proof. f-枚挙可能開集合が開集合であることは明らかである．逆に，もし $U \subseteq X$ が開集合ならば，ある $V \subseteq \mathbb{N}$ について $U = \bigcup_{i\in V} B_i$ と書ける．このとき，$\chi_V : \mathbb{N} \to 2$ を V の特性関数とすれば，V は明らかに χ_V-枚挙可能である．したがって，U は χ_V-枚挙可能開集合である． □

定理 *3.32* の証明. 観察 3.3, 3.6, そして定義 3.11 を思い出せば，計算可能性とは計算的連続性であり，特に連続である．逆に，$\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が連続であるとき，観察 3.6 より，ある $(W_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ が存在して，以下が成立する．

$$\tau \sqsubset \Phi(f) \iff \exists\sigma \sqsubset f.\ \sigma \in W_\tau.$$

いま，$W = \{(\sigma,\tau) : \sigma \in W_\tau\}$ とする．このとき，$g = \chi_W$ とすれば，W は g-枚挙可能であるので，ある計算可能関数 Ψ が存在して，$W = \{\Psi(g,n) : n \in \mathbb{N}\}$ と書くことができる．Ψ を与える有限列上の関数を ψ としたとき，以下の集合を考える．

$$V = \{(\sigma,\gamma,\tau) : \exists n \in \mathbb{N}.\ \psi(\gamma,n)\downarrow = (\sigma,\tau)\}$$

このとき，$\sigma \in W_\tau$ であることはある $n \in \mathbb{N}$ について $\Psi(g,n)\downarrow = (\sigma,\tau)$ であることと同値なので，これはある $\gamma \sqsubset g$ について $\psi(\gamma,n)\downarrow = (\sigma,\tau)$ であることと同値である．したがって，

$$\tau \sqsubset \Phi(f) \iff \exists\sigma \sqsubset f\ \exists\gamma \sqsubset g\ \exists n \in \mathbb{N}.\ \psi(\gamma,n)\downarrow = (\sigma,\tau) \iff \exists\sigma \sqsubset f\ \exists\gamma \sqsubset g.\ (\sigma,\gamma,\tau) \in V$$

を得る．観察 3.3 より，V によってある計算可能関数 $\Gamma\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が定まり，$\Gamma(f,g) = \Phi(f)$ が導かれる． □

実際には，相対化原理はより一般的な空間において示すことができる．ともあれ，証明を見れば分かるように，相対化原理は，答えを知っている者にとっては自明である．ボレル階層や射影階層についても，相対化原理自体はほとんど自明である．重要なことは，相対化原理を応用して何が得られるかという点であり，実際にアディソンが議論しているのは，その部分であった．

アディソンの主眼点は，位相構造ではなく，そこから生成されるボレル構造や射影構造である．1930 年代にはボレル階層および射影階層の理論は著しく高度化しており，研究は困難を極めていたが，アディソンはそこに計算論の光を灯したのである．

■**選択関数の問題:** 1930 年，ルジンは論文「アダマール[*13]の集合の一意化問題について (Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles)」において，以下のタイプの問題を提起した．

> 各 $x \in X$ について条件 $P(x, y)$ を満たす $y \in Y$ が常に存在するとき，$P(x, f(x))$ を満たす $f : X \to Y$ を具体的に構成できるだろうか．具体的に構成できたとして，f の複雑性はどの程度になるだろうか．

もちろんこの解答は P 毎に異なる．一般的には f は P の選択関数と呼ばれるものであり，つまりは選択公理によって存在が保証される．しかし，もちろん P によっては，選択公理は一切用いずに選択関数 f を具体的に構成することができる．当時はまだ選択公理の独立性は示されていなかったため，どのような P に対しても選択関数 f を構成できる希望さえあった．

とはいえ，選択公理を用いずに選択関数が具体的に構成できたとしても，その関数の複雑性が非常に高いということはあり得る．たとえば，1931 年にノヴィコフは「ボレル可測な陰関数について (Sur le fonctions implicites measurables B)」という論文において，$\utilde{\Pi}^0_2$ 集合は必ずしもボレル選択を持たないことを示した．

定理 3.35 (ノヴィコフ 1931)**.** ある全域 $\utilde{\Pi}^0_2$ 集合 $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で，ボレル可測な選択関数を持たないものが存在する．

ノヴィコフの定理を全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ で考えると，実際には，ある全域閉集合 $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ で，ボレル可測な選択関数を持たないものが存在することが示される．ところで，計算可能性理論において，クリーネの 1955 年の論文「数論的述語の階層 (Hierarchies of number-theoretic predicates)」で示された定理のうちのひとつは以下のようなものである．

定理 3.36 (クリーネ 1955)**.** ある空でない Π_1 集合 $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ で，超算術的な関数 $f \in P$ を持たないものが存在する．

ここでは超算術的関数に関する詳細は説明しないが，ボレル可測関数の計算論的対応物であると思ってほしい．実際，クリーネの 1955 年の定理に相対化原理を用いることによって，ノヴィコフの 1931 年の定理を導くことができる．ただし，クリーネ自身は，この時点では選択関数に関する古典的な研究を認識しておらず，完全に計算論的な興味から上記の定理を導いたようだ．

さて，選択関数の問題に戻ろう．1930 年頃は，関数の複雑性よりも集合の複雑性の指標の方がよく扱われていたので，より正確には，選択関数のグラフの複雑性を求める問題として定式化されていた．ノヴィコフはこれを選択関数の陰関数表示と考えていたようで，これがタイトルにある陰関数ということであろう．さらに言えば，当時考えていたものは，必ずしも全域的でない述語の選択関数に関する問題であった．ルジンはこれを**一意化問題** (*uniformization problem*) と呼んだ．

> 与えられた述語 $P(x, y)$ に対して，以下を満たす述語 $P^*(x, y)$ を求めよ．
>
> $$\forall x \in X\ [\exists y\, P(x, y) \iff \exists! y\, P^*(x, y)]$$

このような P^* は P の一意化と呼ばれるが，P の選択関数のグラフだと思ってよい．実際に 1931 年のノヴィコフが示した主張は，$\utilde{\Pi}^0_2$ 集合は $\utilde{\Sigma}^1_1$ 集合で一意化されるとは限らないという主張である．さて，1930 年

[*13] 1900 年代初頭の選択公理論争において，アダマールは選択公理を擁護する側に立った数少ない人物であった．ルジンが提起した問題は，アダマールの問題をルジンが独自に解釈したものである．V. A. Uspenskii, "Luzin's contribution to the descriptive theory of sets and functions concepts, problems" を参照．

のルジンは，これまでの研究の蓄積を鑑みるに，$\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合の一意化は不可能なのではないかという予想に至った[*14]．ルジンの予想とは裏腹に，1935 年にはノヴィコフによって，$\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合が $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$ 集合によって一意化可能であることが示され，その後も幾つかの後継研究において改良が重ねられていった．そして，$\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合の一意化の最良版は，1939 年に近藤基吉によって発表された．

定理 3.37 (近藤 1939)**.** 任意の $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合 $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合 $P^* \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ によって一意化可能である．

$\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ 集合の一意化については，1941 年にヤンコフ [?] が，1949 年にフォン・ノイマン [?] が作用素環の研究の過程で証明したものがあり，これは現在ヤンコフ-フォン・ノイマンの一意化定理として知られている．

さて，このように選択関数の問題あるいは一意化問題は徐々に発展していったのであるが，実のところ，たとえば近藤基吉による $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$-一意化定理の証明は，ほとんど誰も理解できないような極めて難解なものであったそうである．その頃の射影階層の理論は難化を極めており，もはや誰もが手を出せる領域ではなかった．そのような状況に対して，アディソンは計算可能性理論と相対化原理を経由して，近藤の $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$-一意化定理の極めて明快な証明を与えたのである．この結果として生まれたものが，いわゆる近藤-アディソンの一意化定理である．

定理 3.38 (近藤-アディソン 1957)**.** 任意の Π^1_1 集合 $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は Π^1_1 集合によって一意化可能である．

これは 1957 年の記号論理学夏季研究会におけるアディソンの講演「階層と構成可能性公理 (Hierarchies and the axiom of constructibility)」で発表されたものの一部であり，講演記録はあるものの，実を言えば，アディソンはこの証明を論文としては書き出していない．最初にアディソンの証明の詳細を記述したのは，1962 年の鈴木義人の論文「一意化原理について (On the uniformization principle)」であるようだ．

3.5. 非可解性の次数

さて，計算論の位相的分析は，あくまで高階関数の計算論や実数の計算論の研究の過程で重要視されたものである．したがって，自然数上の計算可能性理論のみに注視する限りでは，位相的手法は役に立つまいと思うかもしれない．しかし，ボレル階層や射影集合との類推は，自然数上の計算可能性理論の研究の過程で見つかったものであるし，実際には，位相的手法が自然数上の計算可能性理論の研究に役立った例は数多い．

自然数の部分集合や自然数上の関数の分類は，計算可能性理論の主要な研究対象である．自然数上の関数の比較を行う場合には，関数空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の構造を利用することはしばしば有用になる．ポストは 1944 年の論文において，自然数の部分集合や自然数上の関数を比較する数多くの方法を提示したが，そのうちの一つが，以下のチューリング還元可能性である．

[*14] この理由のひとつとしては，第 2.3 節で解説した連続体仮説の研究にある．1920 年代までに得られた連続体仮説に関する肯定的結果は，ボレル集合や $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_1$ 集合の完全集合性 (perfect set property) が本質である．1925 年にはルジンは $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合の完全集合性を主要な問題として取り扱ったが，しかし，当時の研究者の膨大な努力にも関わらず $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合の完全集合性は証明できずにいた．現代ではこの理由は至って明白で，$\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合の完全集合性は ZFC 集合論では証明不可能な命題の例であったからである．ルジンはその証明不可能性には至っていないものの，その困難性を認識している．このため，非可算 $\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合から完全木を抽出する困難性からの類推で，$\underset{\sim}{\Pi}{}^1_1$ 集合から元を選択することも困難であると考えたのであろう．

定義 3.39 (ポスト 1944)**.** 関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について，f が g に**チューリング還元可能** (*Turing reducible*) であるとは，ある計算可能関数 $\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在して，$\Phi(g) = f$ となることを指す．このとき，$f \leqslant_T g$ と書く．

高階計算の定義を思い出せば，g の有限個の値の情報を利用して $f(n)$ を計算するアルゴリズムが存在する，ということである．部分集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ の間のチューリング還元可能性は，特性関数 $\chi_A, \chi_B\colon \mathbb{N} \to 2$ を用いて定義する．直感的には $f \leqslant_T g$ とは，g は f 以上の計算不可能性を持つことを意味する．特に決定問題，つまり部分集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対しては，ポストはこれが決定問題のアルゴリズム的非可解性の次数 (degree of unsolvability) を表すと考えた．現在は，非可解性の次数，つまり $\equiv_T$-同値類のことはチューリング次数 (Turing degree) と呼ぶ．ともあれ，このようにして我々は前順序構造 $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leqslant_T)$ を得る．

ポストはこれ以外にも数多くの還元可能性を導入し，それらについては非自明な結果を示したが，1944 年の段階ではチューリング還元可能性に関する非自明な結果は得られていなかった．1948 年の米国数学会において，ポストが「再帰的非可解性の次数 (Degrees of recursive unsolvability)」という発表を行った記録があり，そのアブストラクトによれば，その時点では，いくらかの結果を得ていたようである．

アブストラクトには，相対的 Σ_1-完全集合，すなわち現在チューリングジャンプと呼ばれる概念に関する記述がある．1936 年のチューリングによって導入された停止問題は，自然数上の部分計算可能関数 $\varphi\colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の計算の停止性を判定するものであるが，チューリングジャンプ f' は高階計算可能関数 $\Phi\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ に f を入力した計算の停止性を判定する問題である．

この概念の形式的定義を与えるために，いくつかの記法を導入する必要がある．φ_e を e 番目の部分計算可能関数とする．定義 3.1 を経由すれば，部分計算可能関数 $\varphi_e\colon\subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の枚挙から部分計算可能汎関数 $\Phi_e\colon\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の枚挙を得ることができる．

定義 3.40 (ポスト 1948)**.** 関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の**チューリングジャンプ** (*Turing jump*) とは，以下の関数 $f'\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ である．

$$f'(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Phi_e(f)\downarrow \\ 0 & \text{if } \Phi_e(f)\uparrow \end{cases}$$

プライム記法 f' は既に 1948 年のポストのアブストラクト中で用いられているが，ただし，ジャンプという用語を最初に用いたのは，1954 年のクリーネとポストの共著論文 [?] のようである．1948 年のアブストラクトによれば，ポストは $f <_T f'$ が常に成立することを示している．停止問題の計算不可能性と合わせて，これをチューリング-ポストの定理と呼ぶことにしよう．特に $\varnothing = \lambda n.0$ に対して，以下の系列が得られる．

$$\varnothing <_T \varnothing' <_T \varnothing'' <_T \varnothing''' <_T \cdots$$

以下，f に n 回チューリングジャンプを適用した結果を $f^{(n)}$ と書く．より厳密には，$f^{(0)} = f$ かつ $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ と定義する．以下のポストの定理 2.5 の算術的階層（定義 2.6）への一般化は，1948 年のポストによって報告されたとされる．

定理 3.41 (ポストの定理 1948)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，以下が成立する．

$$A \leqslant_T \varnothing^{(n)} \iff A \text{ は } \Delta_{n+1} \text{ である．}$$

しかし，確かにポストのアブストラクトにはこれに近い記述が見られるものの，正確には上記の主張とはやや異なっている．実際，ポスト本人はそれをクリーネの 1943 年の論文 [?] の Theorem II（算術的階層の厳密性）の拡張として提示しており，ポストの定理 2.5 あるいは同値な主張であるクリーネの Theorem V への言及は無い．

次に，チューリングジャンプ $\mathsf{TJ}(f) = f'$ の位相的性質を分析してみよう．これは高階関数 $\mathsf{TJ}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ と考えることもできる．ポストの定理 3.41 によれば，停止問題は Δ_2 と関連しており，シェーンフィールドの極限補題 2.7 を思い出すと，Δ_2 は極限計算可能性と関連している．そうすると，TJ はベール 1 級関数であることを予期できる．実際には，TJ はより強い性質を持っていることを確認できる．

いま，関数 $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対する以下の順序を考える．

$$f \leqslant g \iff \forall n \in \mathbb{N}.\ f(n) \leqslant g(n).$$

観察 3.42. 計算可能汎関数の計算可能列 $(\Psi_n\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ で，以下の条件を満たすものが存在する．

(1) 任意の $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\Psi_0(f) \leqslant \Psi_1(f) \leqslant \Psi_2(f) \leqslant \dots$ が成立する．
(2) 任意の $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\mathsf{TJ}(f) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(f)$ である．

特に $\mathsf{TJ}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ はベール 1 級関数である．

Proof. $\Psi_n(f)(e)$ として，$\Phi_e(f)$ の計算を n ステップだけシミュレートした結果，計算が停止するならば 1，さもなくば 0 を返す関数とする．このとき，関数 $(n, f) \mapsto \Psi_n(f)$ は明らかに計算可能であり，性質 (1) を満たすことも容易に確認できる．もし $\mathsf{TJ}(f)(e) = 1$ ならば，$\Phi_e(f)$ の計算はある s ステップで停止するので，任意の $n \geqslant s$ について $\Phi_n(f)(e) = 1$ であるから，$\mathsf{TJ}(f)(e) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(f)(e)$ を得る． □

観察 3.42 は，単に TJ がベール 1 級というだけではなく，いわゆる下半連続のような性質を持っていることも述べる．チューリングジャンプの他に興味深い位相的性質は，チューリング-ポストの定理 $f <_T f'$ から得られる．

位相空間 X, Y について，関数 $f\colon X \to Y$ が σ-連続であるとは，ある $\mathbb{R}$ の可算分割 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f|_{A_n}$ が連続であることを意味する．ルジンは，1920〜30 年代に以下の問題を提示したとされる．

問題 3.43 (ルジン)**.** 任意のボレル可測関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は σ-連続か？

この問題は最初に P. Novikov が否定的に解決し，その後，1934 年に Keldysh が発表した論文では，任意の可算順序数 α に対して，α 未満のベール階級の可算個の関数に分解できないベール α 級関数の存在が示されている．1958 年，Adyan-Novikov [?] はさらに下半連続だが σ-連続でない関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を構成している．興味深いことに，チューリングジャンプ TJ の位相的分析によって，Keldysh の定理や Adyan-Novikov の定理の簡易証明を与えることができる．

観察 3.44. チューリングジャンプ $\mathsf{TJ}\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ は σ-連続ではない．

Proof. TJ が σ-連続であったとすると，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の可算分割 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，TJ の各 A_n への制限は連続である．相対化原理 3.32 より，ある計算可能関数 Ψ_n とある関数 g_n が存在して，任意の $f \in A_n$ に対して，$\mathsf{TJ}(f) = \Psi_n(f, g_n)$ と書ける．いま，$g(n, x) = g_n(x)$ としたとき，$\Gamma_n(f, g) = \Psi_n(f, g_n)$ となる計算可能関数 Γ_n を容易に構成できる．このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $g \in A_n$ であるから，$\Gamma_n(g, g) = \mathsf{TJ}(g)$ を得る．しかし，これは $g' = \mathsf{TJ}(g) \leqslant_T g$ を導き，チューリング-ポストの定理に反する． □

したがって，チューリングジャンプ TJ もまた下半連続だが σ-連続でない例であると言える．実際，カントール集合の $\mathbb{R}$ への埋め込みを経由すれば，TJ を $\mathbb{R}$ 上の関数に補正することができ，Adyan-Novikov の定理を得る．1992 年の Jackson-Mauldin [?] による Adyan-Novikov の定理の別証明もまた，類似のアイデアに基づくが，チューリングジャンプ等の計算論的概念は用いずに，実効記述集合論による証明を与えている．上記の証明と同様に，相対化原理を用いた手法によって，$\mathsf{TJ}^n : f \mapsto f^{(n)}$ はベール n 級であるが，n 未満のベール階級の関数には分解できないことを容易に示すことができる．この方法で，Keldysh の定理の別証明も与えられる．チューリングジャンプを用いた Keldysh の定理および Adyan-Novikov の定理の簡易証明は，筆者によって最初に指摘された[*15]と思われる．

チューリングジャンプに関する理解が深まっただろうか．停止問題というと超越的なものを分析しているように感じるが，解析学的な観点からは，あくまで具体的なひとつの下半連続関数にしか過ぎない．しかも，計算可能解析学の用語を用いれば，下半連続関数の中でも最も振る舞いの良い，下半計算可能関数と呼ばれるものである．

それでは，自然数上の計算可能性理論に話を戻そう．チューリング還元の概念はポスト [?] が 1944 年に導入し，1948 年にいくつかの結果が報告されたのは先に述べた通りである．非可解性の次数に関する最初の興味は，系列 $\varnothing <_T \varnothing' <_T \varnothing'' <_T \dots$ の隙間に別のものが入るか，特に $\varnothing <_T f <_T \varnothing'$ となる $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は存在するか，というものであろう．つまり，計算可能問題 $\varnothing$ と停止問題 $\varnothing'$ の中間の非可解性の次数を持つ決定問題は存在するか，という問題である．実際，1944 年のポスト [?] は以下の問題を尋ねており，これはポストの問題として知られる．

問題 3.45 (ポストの問題)**.** $\varnothing <_T A <_T \varnothing'$ となる枚挙可能集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ は存在するか？

もう一つの問題としては，我々は線形系列 $\varnothing <_T \varnothing' <_T \varnothing'' <_T \dots$ を得ているので，$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leqslant_T)$ は全順序であろうか，という疑問も湧く．これに対して，ポストの 1948 年のアブストラクトでは，$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leqslant_T)$ が全順序でないことの証明に取り組んでいると書かれている．

しかし，1940 年代の段階では，チューリング還元 $\leqslant_T$ に関する証明は一つも出版されなかった．おそらくポストは，1940 年代後半から 1950 年代初頭にかけて，チューリング次数に関するいくつかの結果を得ていたと思われるが，1948 年の講演アブストラクトのようなものがあるばかりで，詳細を一切出版していなかった．ロジシャンの回顧録 [?] において，クリーネは，そのようなポストの振る舞いに苦言を呈したことを回顧している．

> こうやって放っておいて，こういう結果が出たと言っておきながら，それを出版しない．あなたがそういう結果を持っているという事実によって，他の誰かがそれについて何かをするのを妨げているのだ．

*15 もちろん，古典的定理の簡易証明を指摘したというだけではつまらない話であるが，これを指摘した理由は，分解可能性予想と呼ばれる未解決問題に筆者が 2015 年に部分的解決を与えた際，証明中でこのアイデアの拡張が必要になったためである [?].

未証明の主張には多くの研究者が取り組むが，既証明の結果の再証明に積極的に取り組む者は少ない．既証明だと主張されながらその詳細が公表されなかったとき，他の研究者はその研究を発展させることもできない．そのまま放っておけば，この研究分野は消えて無くなっていたか，あるいは長い眠りにつき，数十年後に再発見されるという歴史もあり得た．

しかし，クリーネの苦言が歴史を変えた．ポストは証明のアイデアを書き出すことを試み，クリーネがそれを整備，改良し，さらに新たな結果を書き加えることによって，チューリング次数に関する最初の論文が誕生した．1954 年のクリーネ-ポストの論文「再帰的非可解性の次数の上半束 (The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability)」である．

定理 3.46 (クリーネ-ポスト 1954)**.**

(1) $\varnothing <_T f <_T \varnothing'$ となる $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する．

(2) $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \leqslant_T)$ は全順序ではない．つまり，比較不可能なチューリング次数を持つ関数 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する．

実際には，クリーネ-ポストは，より強い定理を証明しており，たとえば，(2) の f, g は中間次数として取ることができる．すなわち，$\varnothing <_T f, g <_T \varnothing'$ である．それだけではなく，互いに $\leqslant_T$-比較不可能であるような無限個のチューリング次数が存在することも示されている．つまり，以下の条件を満たす関数列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在する．

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ \ \varnothing <_T f_i <_T \varnothing' \qquad\qquad (\forall i, j \in \mathbb{N})\ \ [i \neq j \implies f_i \nleqslant_T f_j \text{ and } f_j \nleqslant_T f_i]$$

1944 年のポストの論文から 10 年間，チューリング次数に関する論文は一本たりとも出版されることはなかった．しかし，1954 年にクリーネ-ポストの論文が出版され，チューリング次数に関する証明がひとたび公表されただけで，状況は一変した．数多くの者がこの研究に参入し，次の 10 年間には，数えきれない程の膨大な量の論文が出版されたのである．1950 年代中期から 1960 年代にかけて，たった 10 年のうちに，チューリング次数の理論は急速に発展し，その栄華を極めた, cf. [**?**]．結果があると主張するだけで証明を公表しないということがどれだけ理論の発展を妨げるか，証明の公表の重要性を語るエピソードである．

ともあれ，チューリング次数の理論の最初の定理，クリーネ-ポストの定理に戻ろう．クリーネ-ポストの定理の主張は，様々な関数の比較を伴うので，関数空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の構造の分析が有用足り得る．本稿では，位相的手法によって，この定理の証明を行う．具体的には，ベールのカテゴリー定理を用いた証明である．

歴史的には，1961 年のマイヒルの論文「再帰理論におけるカテゴリー法 (Category methods in recursion theory)」において，ベールのカテゴリー定理（の精密化）によってクリーネ-ポストの定理を証明できることが明示的に指摘されている．とはいえ，非可解性の次数の分析において，関数単体ではなく，全体空間の構造に着目するのが有用であるという指摘は，それ以前から既にあった．たとえば，1958 年のスペクターの論文「比較不可能超次数の測度論的構成 (Measure-theoretic construction of incomparable hyperdegrees)」は，位相的手法ではなく，測度論的手法によるものであるが，ともあれ全体空間の構造が重要な役割を担う．

§ 4. 準ポーランド空間

この節の目的は，1961 年のマイヒルの洞察 [?]，すなわち 1954 年のクリーネ-ポストの定理 [?] の証明の本質はベールのカテゴリー定理（の精密化）である，という視点を解説するための数学的基盤の準備を行うことである．ここでは，マイヒルの元々の指摘よりも見通しの良い現代的な観点から数学的設定の導入を行うが，その代償として少し準備が長くなる．ただし，この数学的設定は，マイヒルの洞察のみならず，計算可能性理論の広範な部分を統一的に取り扱う枠組みの一つとして非常に重要である．

4.1. フィルター空間

汎関数の計算論や実数の計算論のアイデアは，無限的対象を有限的近似を介して取り扱うというものであった．たとえば，全域関数 f という無限的対象の代わりに，実際には有限始切片 $\sigma \sqsubset f$ 上の近似的計算を行ったり，同様に部分関数 f という無限的対象の代わりに，有限部分関数 $f_0 \subseteq f$ 上の近似的計算を行う．実数 x の代わりに，有理 ε-近似 q あるいは有理開区間 $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) \ni x$ 上の近似計算を行う．このように，何らかの無限的対象たちの空間 $\widehat{Q}$ があったとしても，実際の計算はその有限近似たちのなす空間 Q を介して行われるのである．

- $(\widehat{Q} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ 全域関数 f の有限近似とは，全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ における基本開集合 $[\sigma] \ni x$ である．
- $(\widehat{Q} = (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}})$ 部分関数 f の有限近似とは，部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ における基本開集合 $[D] \ni x$ である．
- $(\widehat{Q} = \mathbb{R})$ 実数 x の有限近似とは，実数の空間 $\mathbb{R}$ における基本開集合 $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) \ni x$ である．

一般的に，$\widehat{Q}$ に対応する Q とは何であろうかと考えると，$\widehat{Q}$ は点集合であり，Q は基本開集合たちの集合である．実際に我々が有限的に取り扱えるオブジェクトは基本開集合であり，点ではない．点はあくまで基本開集合によって近似されるものである．つまり，基本開集合のデータ Q こそが先にあるものであって，そこから点のデータ $\widehat{Q}$ が生成されるべきである．それでは，基本データ Q から如何にして $\widehat{Q}$ が生成されるかについて考察していこう．

■フィルター空間: T_0 空間の場合，点 x と近傍フィルター $Nbhd_x = \{U \in Open\,X : x \in U\}$ が一対一に対応する．つまり，開集合の包含関係のなす半順序 $(Open\,X, \subseteq)$ において，$Nbhd_x$ はフィルターになっており，T_0 空間の場合には，そこから点 x を一意に復元できる．このアイデアを利用すると，点よりも開集合の方が基本的概念だと考え，開集合の半順序が先んじて与えられたとしても，点はフィルターとして復元できそうである．とはいえ，すべてのフィルターが点を表すわけではない．一つの方法は（ロケール理論のように）完備素フィルター (completely prime filter) によって点を表すというものがあるが，完備性のような無限的概念を用いるのは一旦回避したい．ここではもう少し手軽であり，ここから先の議論とも相性の良いアプローチを取る．以下，推移的関係 $<$ を備えた集合を単に推移的集合と呼ぶ．

定義 4.1. 推移的集合 $(Q, <)$ に対して，$F \subseteq Q$ が**フィルター** (*filter*) であるとは，空でない有向上方閉集合であることを指す．つまり，$p \in F$ かつ $p < q$ ならば $q \in F$ であり，$p, q \in F$ ならば $r < p, q$ となる $r \in F$ が存在することを意味する．

例 4.2 (近傍フィルター)**.** 位相空間 X の冪集合の包含関係 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ を考える．このとき，任意の $x \in X$ に

対して，$Nbhd_x$ はフィルターである．まず，$x \in U \subseteq V$ ならば $x \in V$ であるから，$Nbhd_x$ は上方閉である．さらに，$x \in U, V$ ならば $x \in U \cap V$ であるから，$Nbhd_x$ は有向集合である．

我々がここから扱うものは，フィルターと点を同一視可能な空間である．つまり，フィルターの集まりとして空間を導入する．以下では，各 $p \in Q$ に対して，p を含むフィルター全体の集合を $[p]$ と書く．考えるものは，$[p]$ たちを基本開集合とする空間である．

定義 4.3 (ディブレクト [?])．推移的集合 $(Q, <)$ のフィルター全体の集合 $Filter\,Q$ には，$\{[p] : p \in Q\}$ を準開基とする位相が備わっていると考え，これを Q 上のフィルター空間と呼ぶ．

可算推移的集合上のフィルター空間と同相な空間は，**準ポーランド空間** (*quasi-Polish space*) と呼ばれる．

準ポーランド空間には同値な特徴付けが多数あり，フィルターによる定義は後に与えられた特徴付けのうちの一つである．フィルター空間ではなくその双対であるイデアル空間の文脈で導入されることも多い．イデアル空間を用いた方が，位相空間の特化順序 (specialization order) との相性は良い．

例 4.4 (離散空間)．$(\mathbb{N}, =)$ 上のフィルターは必ず単元集合 $\{n\}$ なので，$(\mathbb{N}, =)$ 上のフィルター空間は離散空間 $\mathbb{N}$ に対応する．

例 4.5 (全域関数の空間)．全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は準ポーランド空間である．有限列全体の集合 $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ 上の始切片関係 $\sqsubseteq$ の真の逆順序 $\sqsupsetneq$ を考えると，$(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \sqsupsetneq)$ 上のフィルター空間として $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を復元できる．

実際，フィルターと関数が一対一対応することを確認しよう．まず，関数 $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の始切片全体 $\{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \sigma \sqsubset f\}$ は明らかにフィルターである．逆に，すべてのフィルター $F \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ はすべてこの形である．なぜなら，上方閉であることからフィルターは始切片に対して閉じており，有向性より，すべての F の元は比較可能でなければならない．さらに，$\sigma, \sigma \in F$ に対する有向性より，ある $\tau \sqsupsetneq \sigma$ が F に属すから，これは 1 つの全域関数を決定する．

例 4.6 (部分関数の空間)．部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ は準ポーランド空間である．有限関数全体 $FinFunc$ 上の逆包含関係 $\supseteq$ を考えると，$(FinFunc, \supseteq)$ 上のフィルター空間として $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ を復元できる．

例 4.5 における推移的関係 $\sqsupsetneq$ は非反射的であり，例 4.6 における推移的関係 $\supseteq$ は反射的である．反射的かつ推移的な関係は前順序 (preorder) と呼ばれるが，これに対応するフィルター空間には特別な名称が付いている．

例 4.7 (代数領域)．可算前順序集合 $(Q, \leqslant)$ 上のフィルター空間は，領域理論 (domain theory) で研究されている **ω-代数領域** (*ω-algebraic domain*) に対応する*16．特に，ω-代数領域は準ポーランド空間である．たとえば，例 4.6 の部分関数の空間は ω-代数領域である．また，領域理論における抽象基底 (abstract basis) を考えれば，ω-連続領域 (ω-continuous domain) が準ポーランド空間であることを示すこともできる*17．

*16 代数的完備半順序 (algebraic cpo) がそのコンパクト元たちのイデアル完備化として復元できるという領域理論における結果による．準ポーランド空間の定義（の順序双対）が領域理論におけるいわゆる rounded イデアル完備化であることにも注意しよう．

*17 たとえば Abramsky-Jung “Domain Theory [?]” の第 2.2.6 節を見よ．抽象基底は，Smyth の 1977 年の論文「実効的に所与の領域 (effectively given domains [?])」において，領域理論の計算可能版の展開のために導入されたものである．

一般のフィルター空間において，$\{[p] : p \in Q\}$ は準開基というだけでなく，開基になっていることを確認できる．したがって，フィルター空間の開集合とは，ある $W \subseteq Q$ に対して，$\bigcup_{p \in W}[p]$ の形の集合のことである．実際にこれが成立することを確認しよう．

観察 4.8. 任意の $p, q \in Q$ に対して，$[p] \cap [q] = \bigcup\{[r] : r < p, q\}$ が成立する．

Proof. フィルター x に対して，$x \in [p] \cap [q]$ とは $p, q \in x$ であることであるから，有向性より，ある $r < p, q$ について $r \in x$ が成立するから，$x \in [r]$ である．逆に，ある $r < p, q$ について $x \in [r]$ ならば，$r \in x$ かつ上方閉であることから，$p, q \in x$ も導かれ，これは $x \in [p] \cap [q]$ を意味する． □

ところで，準ポーランド空間という用語は，ポーランド空間 (Polish space) に準じる性質を持つことに由来する．ここで，ポーランド空間とは，完備可分距離化可能空間のことである．実際に，任意のポーランド空間は準ポーランド空間であることを確認しよう．

命題 4.9. 任意のポーランド空間は準ポーランド空間である．

Proof. ポーランド空間 X の可算稠密集合 $A \subseteq X$ が与えられているとする．X の基本開球とは，A の元 $z \in A$ を中心とする半径 2^{-n} の開球 $B_n(z) = \{x \in X : d(x, z) < 2^{-n}\}$ を指す．いま，$Ball_X$ を X の基本開球全体の集合とし，基本開球間の関係 $\Subset$ を以下によって定義する．

$$B_n(y) \Subset B_m(z) \iff d(y, z) + 2^{-n} < 2^{-m}$$

この関係は，$\overline{B}_n(y) \subseteq B_m(z)$ を導く．ここで，$\overline{B}_n(y)$ は対応する基本閉球 $\{x \in X : d(x, y) \leqslant 2^{-n}\}$ である．いま，各 $x \in X$ に近傍フィルター $Nbhd_x = \{F \in Filter\,Ball_X : x \in F\}$ が対応する．

主張. 任意のフィルター $F \subseteq Ball_X$ は，ある点 $x \in X$ の近傍フィルターである．

Proof. F は有向なので，特に無限下降列 $B_0 \Supset B_1 \Supset B_2 \Supset \dots$ を含む．完備性より，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ は一点集合 $\{x\}$ である．したがって，$\bigcap F \subseteq \{x\}$ を得る．いま，$x \in \bigcap F$ であることを示そう．さもなくば，$x \notin B \in F$ となる B が存在するが，有向性より $C \Subset B$ となる C を得る．このとき，$\overline{C} \subseteq B \notin x$ であるから，$d(x, C) > \varepsilon$ となる正実数 ε が存在する．よって，x の任意の ε-近傍 D に対して，$C \cap D = \varnothing$ を得るから，特に $C \cap B_n = \varnothing$ となる n が存在する．いま，$B_n, C \in F$ であるが，この $\Subset$-下界は存在しないので，これは F の有向性に反する．よって，$\{x\} = \bigcap F$ である．いま，$x \in B \in Ball_X$ ならば，$x \in B_\varepsilon(x) \Subset B$ となる ε が存在する．特に，ある n について，$B_n \Subset B$ を得る．$B_n \in F$ かつ F は $\Subset$-上方閉なので，$B \in F$ を得る．したがって，F は x の近傍フィルターである． □

フィルター空間 $Filter\,Ball_X$ が X と同相であることを示そう．$N\colon x \mapsto Nbhd_x$ が同相写像を与えることを確認する．X は T_0 なので N は単射であり，また，上記の主張より N は全射である．この連続性については，まず基本開集合 $[B]$ は B を含むフィルター全体なので，$N^{-1}[B]$ は近傍フィルターが B を含む点全体，すなわち B と一致するから，これは開集合である．したがって，N は連続である．逆に，X の開集合は基本開球の和 $U = \bigcup_n B_n$ として書くことができ，$N[B_n]$ は B_n の元の近傍フィルター全体，つまり B_n を含むフィルター全体であるから，$N[B_n] = B_n$ である．したがって，$N[U] = \bigcup_n N[B_n]$ であるから，$N[U]$ は開集合であり，N^{-1} もまた連続である．以上より，N が同相写像であることが示された． □

ポーランド空間に対応する推移的関係 $\Subset$ は，一般的には非反射的であることに注意する．歴史的なコメントをしておくと，準ポーランド空間は，可算基を持つ完備準距離化可能 (quasi-metrizable) 空間として最初に導入されたものである．距離空間においては，可分性は可算基を持つことと同値であるから，ポーランド空間とは可算基を持つ完備距離化可能空間のことである．つまり，準ポーランド空間とは，ポーランド空間における距離の概念を準距離に弱めたものであり，したがってその名称の由来は明らかであろう．フィルター空間（イデアル空間）の定義は，後に準ポーランド空間の特徴付けとして与えられたものである．

用語． 以後，Q 上のフィルター空間を $\widehat{Q}$ と書くことにする．ここまでの具体例を見て感覚を掴めたと思うが，推移的集合 $(Q,<)$ は空間本体 $\widehat{Q}$ の近似情報を扱うシステムである．このため，$(Q,<)$ を**近似系**と呼ぶこともある．

次にフィルター空間の間の連続写像 $f\colon \widehat{P}\to\widehat{Q}$ について分析しよう．連続性のアイデアとなるものは近似可能性である．したがって，連続写像 f は「各基本情報 $p\in P$ をどのような基本情報 $q\in Q$ に変換するかのリスト $\varphi\subseteq P\times Q$」によって表されるべきである．ここで，$\varphi\subseteq P\times Q$ は部分多価関数と思ってもよいだろう．このとき，$\widehat{\varphi}$ を以下のように定義する．

$$\widehat{\varphi}(x)=\{q\in Q:\exists p\in x.\ (p,q)\in\varphi\}$$

入力 x が P のフィルターであっても出力 $\widehat{\varphi}(x)$ は Q のフィルターとは限らないが，ともあれ，フィルター空間上の部分写像 $\widehat{\varphi}\colon\subseteq\widehat{P}\to\widehat{Q}$ が定義される．以下の命題は，フィルター空間における観察 3.3 の類似物である．

命題 4.10. 写像 $f\colon\widehat{P}\to\widehat{Q}$ が連続であることと，$f=\widehat{\varphi}$ となる $\varphi\subseteq P\times Q$ が存在することは同値である．

Proof. $(\Rightarrow)$ f が連続であると仮定し，$\varphi=\{(p,q):f[p]\subseteq[q]\}$ と定義する．このとき，

$$q\in\widehat{\varphi}(x)\iff\exists p\in x.\ f[p]\subseteq[q]\implies f(x)\in f[p]\subseteq[q]\implies q\in f(x)$$

である．逆に，$q\in f(x)$ を仮定すると，まず，これは $x\in f^{-1}[q]$ と同値である．連続性より $f^{-1}[q]$ は開なので，ある $p\in P$ が存在して，$x\in[p]\subseteq f^{-1}[q]$ を満たす．ここで，$[p]\subseteq f^{-1}[q]$ は $f[p]\subseteq[q]$ と同値であることに注意すれば，これは $(p,q)\in\varphi$ を導くので，$q\in\widehat{\varphi}(x)$ である．

$(\Leftarrow)$ $\widehat{\varphi}$ が連続であることを示せばよい．各 $q\in Q$ に対して，

$$\widehat{\varphi}(x)\in[q]\iff q\in\widehat{\varphi}(x)\iff\exists p\in x.\ (p,q)\in\varphi$$

であることに注意すれば，$\widehat{\varphi}^{-1}[q]=\bigcup\{[p]:(p,q)\in\varphi\}$ であることが分かる．これは基本開集合 $[p]$ たちの和なので開集合である．□

命題 4.9 の証明を見ると，ポーランド空間に対応するフィルター空間において，任意の $p\in Q$ に対して，$[p]\neq\varnothing$ という特性を持つ．この性質は，推移的集合 $(Q,<)$ が自己稠密であることと同値である．

観察 4.11. 推移的集合 $(Q,<)$ に対して，以下が成立する．

$$\forall p\in Q.\ [p]\neq\varnothing\iff\forall p\in Q\exists q\in Q.\ q<p$$

右辺の性質を満たすとき，$(Q,<)$ は**自己稠密** (*dense-in-itself*) であるという．

Proof. $(\Rightarrow)$ p を含むフィルター x が存在するので，有向性より，$q < p$ となる $q \in x$ が存在する．これは特に右辺を導く．$(\Leftarrow)$ $p_0 = p$ に対して，自己稠密性を用いて，列 $p_0 > p_1 > p_2 > \dots$ を得る．このとき，$\{q \in Q : (\exists n)\ p_n < q\}$ は p を含むフィルターであることを容易に確認できる． □

Q を自己稠密部分 $Q^+ = \{p \in Q : [p] \neq \varnothing\}$ に制限しても，フィルター空間 $\hat{Q}$ と $\hat{Q}^+$ が同相であることは容易に確認できる．したがって，準ポーランド空間とは，自己稠密な推移的集合上のフィルター空間と同相な空間であると言ってもよい．

4.2. 計算可能準ポーランド空間

日常的な数学的活動で現れる空間の多くは準ポーランド空間であり，その点で充分に一般的な概念である．それにも関わらず，計算論的に非常に取り扱いやすいのが準ポーランド空間の強力な点である．準ポーランド空間は，可算推移的関係上のフィルター空間として表すことができたが，これに計算可能性を組み込んでいこう．

定義 4.12. $\mathbb{N}$ 上の枚挙可能推移的関係 $<$ 上のフィルター空間を枚挙可能フィルター空間と呼ぶ．さらに，$\{p \in \mathbb{N} : [p] \neq \varnothing\}$ も枚挙可能であるような空間を計算可能フィルター空間と呼ぶ．また，枚挙可能（計算可能）フィルター空間と計算的同相な空間を，枚挙可能（計算可能）準ポーランド空間と呼ぶ．

注意. 実際には，台集合は $\mathbb{N}$ の代わりに枚挙可能集合 $Q \subseteq \mathbb{N}$ を考えてもよい．なぜなら，枚挙 $Q = \{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を経由すれば，同様の性質を持つ $\mathbb{N}$ 上の推移的関係を得る．具体的には，$i <' j$ を $q_i < q_j$ として定義し，$(\mathbb{N}, <')$ を考えればよい．具体例を扱う際，台集合を常に $\mathbb{N}$ とするのは一手間掛かるので，以後は，一般の Q を認めることにする．

計算可能フィルター空間 $\hat{Q}$ について，Q を枚挙可能部分集合 $Q^+ = \{p \in Q : [p] \neq \varnothing\} \subseteq Q$ に制限することによって，任意の $p \in Q^+$ について $[p] \neq \varnothing$ となる．系 4.11 より，これは Q^+ が自己稠密であることと同値である．したがって，計算可能フィルター空間とは，枚挙可能集合 $Q \subseteq \mathbb{N}$ 上の自己稠密な枚挙可能推移的関係 $<$ 上のフィルター空間のことである．

用語. 枚挙可能集合 $Q \subseteq \mathbb{N}$ とその上の枚挙可能推移的関係 $<$ の対 $(Q, <)$ を以後は**枚挙近似系**と呼ぶことにする．さらに，$<$ が自己稠密な場合には，$(Q, <)$ を**計算近似系**と呼ぶ．

空間 $\hat{Q}$ の点はフィルターであり，このフィルターの枚挙によって点は近似されていく．

定義 4.13. 枚挙可能フィルター空間 $\hat{Q}$ の点 F が**計算可能** (*computable*) であるとは，フィルター $F \subseteq Q$ が枚挙可能であることを意味する．

それでは，実際に計算可能準ポーランド空間の具体例を見ていこう．たとえば，例 4.5 の全域関数の空間や例 4.6 の部分関数の空間が計算可能準ポーランド空間であることは容易に確認できる．さらに，計算可能点が計算可能関数と一致することも確認できる．

例 4.14. 全域関数の空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は計算近似系 $(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \sqsubseteq)$ 上のフィルター空間として得られるので，計算可能準

ポーランド空間である．さらに，$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が計算可能であることとフィルター $\{\sigma : \sigma \sqsubseteq f\}$ が枚挙可能であることは同値である．

例 4.15. 部分関数の空間 $(\mathbb{N}_\perp)^\mathbb{N}$ は計算近似系 $(FinFunc, \subseteq)$ 上のフィルター空間として得られるので，計算可能準ポーランド空間である．さらに，$f\colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が計算可能であることとフィルター $\{D : D \subseteq f\}$ が枚挙可能であることは同値である．

任意のポーランド空間は準ポーランド空間であったが，どのようなポーランド空間であれば計算可能準ポーランド空間となるだろうか．

定義 4.16. ポーランド空間 X が**右枚挙可能** (*right enumerable*) であるとは，X 上の距離 d および可算稠密集合の枚挙 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\{(m,n,q) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Q} : d(z_m, z_n) < q\}$ が枚挙可能であることを意味する．

観察 4.17. 右枚挙可能ポーランド空間は計算可能準ポーランド空間である．

Proof. 命題 4.9 の証明における関係 $B_n(z_k) \Subset B_m(z_\ell)$ は $d(z_k, z_\ell) < 2^{-m} - 2^{-n}$ と書けるので，これは枚挙可能である．さらに，任意の基本開球 B は中心 z_n を含むので，$[B]$ は中心 z_n の近傍フィルターを含むから，特に計算可能である． □

右枚挙可能ポーランド空間でない枚挙可能準ポーランド空間の例も幾つか提示しておこう．

例 4.18. 例 4.7 の ω-代数領域について思い出そう．いま，$\mathbb{N}$ 上の枚挙可能（計算可能）前順序上のフィルター空間と計算的同相な空間を枚挙可能（計算可能）代数領域と呼ぶことにする．これらはもちろんは枚挙可能（計算可能）準ポーランド空間である．たとえば，部分関数の空間は計算可能代数領域である．

つづいて，準ポーランド空間の間の写像の計算可能性について考察することにしよう．命題 4.10 およびこれまでの計算的連続性の定義を考えれば，写像の計算的連続性は以下によって定義するのが妥当であろう．

定義 4.19. 枚挙可能フィルター空間 $\widehat{P}$ と $\widehat{Q}$ の間の写像 $\Phi\colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ が計算的連続であるとは，ある枚挙可能集合 $\varphi \subseteq P \times Q$ が存在して，$\Phi = \widehat{\varphi}$ と書けることである．

枚挙可能フィルター空間上の計算可能関数として，別の可能性も考え得る．写像 $\Phi\colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ は，フィルター $F \subseteq P$ を別のフィルター $\Phi(F) \subseteq Q$ に変換するプロセスである．この写像には，フィルター F の元 $p_0, p_1, p_2, \dots$ の情報が入力として徐々に与えられていき，それを利用して，$\Phi(F)$ の元を徐々に出力していく．

$$F \ni p_0, p_1, p_2, \dots \quad \stackrel{\Phi}{\longmapsto} \quad q_0, q_1, q_2, \dots \in \Phi(F)$$

ただし，入力情報 $p_0, p_1, p_2, \dots \in F$ がどのような順序で与えられるかは不明であり，出力情報 $q_0, q_1, q_2, \dots \in \Phi(F)$ もどのような順序で与えてもよい．実際，P や Q はあくまで推移的集合であり，整列集合ではないのだから，そもそも線形順序を事前に定めるということが一般的には不可能である．もちろん，枚挙可能フィルター空間を考える場合には，$P, Q \subseteq \mathbb{N}$ となるようにコードされているから，自然数の順序を用いて元を整列することはできるが，自然数の整列順序の情報は P や Q が本来持っているデータではない．

ともあれ，上記のプロセスは，部分関数を入出力とする K_2-計算のプロセス (定義 3.7) と類似している．実

際，部分集合 $F \subseteq \mathbb{N}$ を 1 値部分関数 $\chi_F :\subseteq \mathbb{N} \to 1$ と同一視して考えよう．

$$\chi_F(n)\downarrow = \bullet \iff n \in F.$$

つまり，冪集合 $\mathsf{Pow}\,\mathbb{N}$ と関数空間 $(1_\perp)^{\mathbb{N}}$ は同一視できる．後者の空間の代わりに $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ を考えてもよい．また，枚挙可能性の認識可能性との同値性より，F が枚挙可能であることと χ_F が計算可能であることは同値であることにも注意しておこう．ともあれ，$(1_\perp)^{\mathbb{N}} \subseteq (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ であるから，$(1_\perp)^{\mathbb{N}}$ 上の計算可能性理論は $(\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ の特別な場合として導入できる．

定義 4.20. 枚挙可能フィルター空間 $\widehat{P}$ と $\widehat{Q}$ の間の写像 $\Phi \colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ が K_2-計算可能であるとは，ある K_2-計算可能関数 $\Psi :\subseteq (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}$ が存在して，任意のフィルター $F \subseteq P$ に対して $\Psi(\chi_F) = \chi_{\Phi(F)}$ と書けることである．

命題 4.21. 写像 $\Phi \colon \widehat{P} \to \widehat{Q}$ が計算的連続であることと K_2-計算可能であることは同値である．

Proof. 計算的連続性の定義 4.19 を正確に書き下すと，ある $\varphi \subseteq P \times Q$ に対して，以下が成立することである．

$$q \in \Phi(F) \iff \exists p \in F.\ (p,q) \in \varphi$$

一方，定義 3.7 およびその直後の文章を思い出すと，部分関数を入出力とする汎関数 Ψ が K_2-計算可能であるとは，ある部分計算可能関数 ψ が存在して，

$$\Psi(\chi_F)(q) = n \iff \exists D \subseteq \chi_F.\ \psi(D,q) = n$$

となることである．ここで，D は有限関数である．現在は出力 n として $\bullet$ のみを考えており，$\chi_U(q) = \bullet$ は $q \in U$ を意味していたことから，この条件は以下のような枚挙可能集合 $\psi \subseteq [\mathbb{N}]^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ の存在と同値である．

$$q \in \Phi(F) \iff \exists D \subseteq F.\ (D,q) \in \psi.$$

P, Q の元の枚挙を待つことにより，$\psi \subseteq [P]^{<\mathbb{N}} \times Q$ であることを仮定できる．以上の定義の書き換えに基づいて，主張の証明を与えよう．

($\Rightarrow$) もし Φ が計算的連続ならば，$\psi = \{(\{p\}, q) : (p,q) \in \varphi\}$ とすれば，Φ が K_2-計算可能であることが導かれる．
($\Leftarrow$) もし Φ が K_2-計算可能ならば，$(D,q) \in \psi$ が枚挙されたときに D のどの元よりも下にある p に対して，$(p,q) \in \varphi$ と枚挙する．つまり，

$$(p,q) \in \varphi \iff \exists D\ [p < D \text{ and } (D,q) \in \psi]$$

と定義する．ここで，$p < D$ は，任意の $p' \in D$ に対して $p < p'$ であることを意味する．D は有限集合なので，観察 4.8 より，任意のフィルター F に対して，$D \subseteq F$ であることとある $r < D$ に対して $r \in F$ であることは同値である．したがって，$\Phi = \widehat{\varphi}$ を得る． □

Q 上のフィルター空間 $\widehat{Q}$ の開集合 U は，ある $\underline{U} \subseteq Q$ に対して，$\bigcup_{p \in \underline{U}} [p]$ と書けたことを思い出そう．いま，Q が自然数でコードされているとする．

定義 4.22. U が α-枚挙可能開集合であるとは，上記のようなある $\underline{U}$ が α-枚挙可能であることを意味する．

■準ポーランド空間における K_1-計算可能性: 準ポーランド空間は関数空間 $(1_\perp)^{\mathbb{N}}$ あるいは $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ の部分空間として扱えるので，K_1-計算可能性についても議論できる．したがって，可算推移的集合 Q 上のフィルター集合 $Filter\,Q$ に対して，標準的な準ポーランド位相ではなくエルショフ位相を入れることも可能である．自然数上の部分関数の空間の場合と同様に，標準位相とエルショフ位相は同値になるか，というと一般的にはそこまでは期待できない．

K_1-計算可能性とエルショフ計算的連続性の同値性 (命題 3.27, 3.28) については任意の計算可能準ポーランド空間へと拡張できる．しかし，残念ながら，ライス-シャピロの定理 3.30 の証明が一般的には通用しないのである．一般的には，証明中に得た有限関数 φ_p が空間の元である必要がないので，次のステップの $\varphi_{q(d)}$ の構成の議論が成り立たなくなってしまう．

それでは，どのような計算可能準ポーランド空間であればライス-シャピロの定理が成立するかというと，その一例は，計算可能代数領域である．大雑把に言えば，計算可能代数領域においては，有限関数の代わりに有限生成フィルターを用いた同様の議論が可能である．

> **定理 4.23.** 計算可能代数領域において，ライス-シャピロの定理およびマイヒル-シェファードソンの定理は成立する．

代数領域や連続領域などの概念は，領域理論 [?] と呼ばれる分野で深く研究されている．領域理論は，現代では，プログラミング言語の意味論の文脈で最も有名な理論であるが，その起源の一つはここまでで述べてきた高階汎関数の計算可能性理論にある．1950 年代中頃から，第 3 節で解説したような型 2 汎関数の計算論が大きな研究トピックとなり，1950 年代末から 1960 年代にかけては，より高階の汎関数の計算論の研究がなされるようになった．全域汎関数に関しては，クリーネとクライゼル，部分汎関数に関してはプラテク [?] によって，重要な基礎研究が成し遂げられていた．

領域理論は，1960 年代末にスコット (Dana Scott) が発案したとされる．スコットの最初期の論文を見ると，特に上述のプラテクの 1966 年の博士論文「再帰理論の基礎 (foundations of recursion theory)」における高階部分汎関数の計算可能性理論の研究が強調されている．また，同時期に領域理論のアイデアに独立に辿り着いた人物に，エルショフ (Yuri Ershov) もいる．スコットの目的はどちらかというと高階汎関数の計算可能性理論の発展というよりはラムダ計算の意味論を与えることであったが，エルショフの研究の焦点はまさに高階計算可能性理論に絞られており，ここまでで展開した理論の発展形として領域理論を導入するものであった．

ともあれ，上述のような歴史的経緯から，定理 4.23 のように，ライス-シャピロの定理とマイヒル-シェファードソンの定理を領域理論の文脈で一般化することは自然な流れである．スコットは少なくとも 1976 年の論文「束としてのデータ型 (Data types as lattices)」において，マイヒル-シェファードソンの定理のラムダ計算版を証明している．その後の 1970 年代後半において，様々な研究者によって，より領域理論的な設定でこれらの定理が証明されたようだ．

4.3. ベールのカテゴリー定理

■実効ベールのカテゴリー定理: 計算可能性理論における非常に強力な道具のひとつが，ベールのカテゴリー定理である．この定理の主張を説明するために，いくつかの用語を導入しよう．

定義 4.24. 位相空間 X の部分集合 $S \subseteq X$ が**稠密** (*dense*) であるとは，任意の空でない開集合 $V \subseteq X$ に対して，$S \cap V \neq \varnothing$ であることを指す．位相空間 X が**ベール空間** (*Baire space*) であるとは，任意の稠密開集合の可算列 $U_0, U_1, U_2 \dots \subseteq X$ が与えられたとき，$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ もまた稠密であるというものである．

ベール空間の定義の構成的意味について説明しよう．我々は，何らかの性質を満たす要素 x を構成したいとし，このために要件のリスト $R_0, R_1, R_2, \dots$ を提示する．もし，各要件 R_n を満たす要素が十分に沢山存在するならば，すべての要件 $R_0, R_1, R_2, \dots$ を同時に満たす要素が十分に沢山存在する．これが，ベール空間の定義の直感的なアイデアである．

ベールのカテゴリー定理 (*Baire category theorem*) の最も古典的な形式は，任意のポーランド空間はベール空間であることを述べる．この形のベールのカテゴリー定理は極めて構成的であり，計算可能性理論において様々な具体例を構成するために非常に役に立つ．ベールのカテゴリー定理はより一般的な位相空間に拡張できることも知られているが，最も一般的な形は非構成的であることが知られており，そのような一般化の代償として，計算可能性理論等においては全く役に立たなくなってしまう．ここでは，構成的に成立する，ベールのカテゴリー定理の以下の形式について議論したい．

定理 4.25 (ディブレクト [?])**.** 任意の準ポーランド空間はベール空間である．

準ポーランド空間とは，自己稠密な推移的集合上のフィルター空間 $\hat{Q}$ と同相な空間であった．以下では Q は常に自己稠密であると仮定する．開集合 $U \subseteq \hat{Q}$ はある $\underline{U} \subseteq Q$ について，$\bigcup_{p \in \underline{U}} [p]$ として書けたことを思い出そう．フィルターの上方閉性より，$q < p$ ならば $[q] \subseteq [p]$ であるから，$\underline{U}$ は下方閉であるとしてよい．

定義 4.26. Q の部分集合 $W \subseteq Q$ に関する以下の性質を考える．

(1) W が**開** (*open*) であるとは，W が下方閉であることを意味する．すなわち，任意の $q < p \in W$ ならば $q \in W$ となることを指す．
(2) W が**稠密** (*dense*) であるとは，任意の $p \in Q$ に対して，$q < p$ となる $q \in W$ が存在することを指す．

観察 4.27. フィルター空間 $\hat{Q}$ の部分集合 U が稠密開集合であることと，ある稠密開集合 $\underline{U} \subseteq Q$ が存在して，$U = \bigcup_{p \in \underline{U}} [p]$ と書けることは同値である．

Proof. ($\Rightarrow$) U は開集合なので，ある下方閉集合 $\underline{U} \subseteq Q$ について，$U = \bigcup_{p \in \underline{U}} [p]$ と書ける．後は，$\underline{U}$ が稠密であることを示せばよい．U は稠密なので，任意の $p \in Q$ に対して，$U \cap [p] \neq \varnothing$ である．特に $\bigcup_{q \in \underline{U}} [q] \cap [p] \neq \varnothing$ であるから，ある x と $q \in \underline{U}$ が存在して，$p, q \in x$ となる．x はフィルターなので，$r < p, q$ となる $r \in x$ が存在する．$\underline{U}$ は下方閉であったから，$r < q \in \underline{U}$ より，$r \in \underline{U}$ である．したがって，$\underline{U}$ は稠密である．

($\Leftarrow$) 逆に，$\underline{U}$ が稠密であるとき，任意の $p \in Q$ に対して，$q < p$ となる $q \in \underline{U}$ が存在する．このとき，$[q] \subseteq U$ かつ $[q] \subseteq [p]$ であり，自己稠密性より，$\varnothing \neq [q] \subseteq U \cap [p]$ を得る． □

準ポーランド空間 $\widehat{Q}$ において，ベールのカテゴリー定理の主張の意味について考えてみよう．$\widehat{Q}$ の稠密開集合の族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は空でない共通部分を持つ，というのがベールのカテゴリー定理である．共通部分に属す元は $\widehat{Q}$ の点であるから，つまりは Q 上のフィルターである．また，点 $x\in\widehat{Q}$ について，$x\in U$ であることと $x\cap\underline{U}\neq\emptyset$ が同値であることに注意しながら，以下の概念について考えてみよう．

定義 4.28. 推移的集合 Q の稠密開集合の族 D に対して, Q 上のフィルター F が D-**ジェネリック** (D-*generic*) であるとは，任意の $W\in D$ に対して，$F\cap W\neq\emptyset$ を満たすことを意味する．

観察 4.29. $\widehat{Q}$ の稠密開集合の族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，推移的集合 Q 上のフィルター F が $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ たちの共通部分に属すことと F が $\{\underline{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-ジェネリックであることは同値である．

Proof. $F\in\bigcap_n U_n$ であるとは，任意の n に対して，$F\in U_n=\bigcup_{p\in\underline{U}_n}[p]$ であることであり，最後の条件は，ある $p\in\underline{U}_n$ に対して $p\in F$ であることを意味する．後者の条件は $F\cap\underline{U}_n\neq\emptyset$ と同値である． □

以上より，準ポーランド空間に対するベールのカテゴリー定理は，フィルターの言葉を用いて言い換えることができる．フィルターを用いたベールのカテゴリー定理の言い換えは，ラショーヴァ-シコルスキの補題 (Rasiowa-Sikorski lemma; RS 補題) としてもよく知られている．

補題 4.30 (ラショーヴァ-シコルスキの補題)**.** 推移的集合 Q の稠密開集合の可算族 D に対して，D-ジェネリック・フィルターが存在する．

RS 補題は通常は前順序または半順序集合 Q に対して定式化されることが多いので，準ポーランド空間よりは ω-代数領域に対するベールのカテゴリー定理と言った方が正確かもしれない．半順序集合によって表せるフィルター空間はごく一部であるから，推移的集合への一般化は本質的である．

我々がここで示したいものは，準ポーランド空間に対するベールのカテゴリー定理あるいは RS 補題の計算可能版である．推移的集合の計算版を計算近似系と呼んでいたことを思い出そう．RS 補題の方で説明するならば，計算近似系 $(Q,<)$ の稠密開集合の枚挙可能族 D に対して，枚挙可能な D-ジェネリック・フィルター $F\subseteq Q$ が存在する．

定理 4.31 (実効ベールのカテゴリー定理)**.** 計算近似系 $(Q,<)$ の稠密開集合の可算族 D の枚挙を入力すると，D-ジェネリック・フィルターの枚挙を出力する計算可能汎関数が存在する．

Proof. $(\mathbb{N},<)$ の稠密開集合の可算族 $D=\{\underline{U}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対する $\{(k,p):p\in\underline{U}_k\}$ の枚挙が与えられていると仮定する．まず，適当な $p_0\in Q$ が枚挙されるのを待つ．いま，$p_0>p_1>p_2>\cdots>p_k$ が構成されたと仮定する．$\underline{U}_k$ は稠密なので，$q<p_k$ となる $q\in\underline{U}_k$ がいつか枚挙されるはずなので，それを待ち，$p_{k+1}=q$ とする．このとき，$F=\{q\in Q:(\exists n\in\mathbb{N})\ p_n<q\}$ はフィルターであり，これは枚挙可能である．定義より $p_{k+1}\in F$ であるから，$p_{k+1}\in F\cap\underline{U}_k$ となり，$F\cap\underline{U}_k\neq\emptyset$ である．以上より，F は D-ジェネリック・フィルターである． □

フィルター空間の方で実効ベールのカテゴリー定理を直接説明するならば，準ポーランド空間 $X=\widehat{Q}$ の稠密開集合の可算列 $U_0,U_1,U_2,\dots\subseteq X$ のコードを入力すると，ある $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ のコードを出力するプログ

ラムが存在するということである．ここで，各開集合 $U \subseteq \widehat{Q}$ の生成集合は $\underline{U}$ の枚挙によってコードされており，点 $x \in \widehat{Q}$ はフィルターの枚挙によってコードされている．

例 4.32. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の稠密開集合の枚挙可能列 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，計算可能関数 $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ を必ず構成できる．

フィルターの概念は計算論的に取り扱いやすいが，空間との結び付きを忘れてはならない．フィルターとは点であり，ジェネリック点 x のアイデアは「位相的に多数のものが満たす特性は，x もまた満たす」というものである．つまりは位相的に無特性であることを意味し，ランダム性の位相的対応物とみなされることも多い．

■ジェネリック点の存在: 実効ベールのカテゴリー定理は非常に強力な道具であるが，少し注意点がある．開集合が稠密であるか否かの判定が，計算論的には困難であるという点である．実効ベールのカテゴリー定理プログラムに稠密でない開集合のコードを入力すると，出力が得られないことがあるため，注意しなければならない．したがって，実効ベールのカテゴリー定理プログラムに入力する開集合には，稠密性が明らかに保証されている必要がある．稠密であることが明らかに保証されている例を挙げよう．

例 4.33. 位相空間 X の部分集合 $S \subseteq X$ の**外部** (*exterior*) とは，$X \backslash S$ に含まれる最大の開集合 $\mathrm{ext}(S)$ を指す．開集合 $U \subseteq X$ に対して，$U \cup \mathrm{ext}(U)$ は稠密開集合である．$U \cup \mathrm{ext}(U)$ の補集合のことは，U の**境界** (*boundary*) と呼ばれ，しばしば ∂U と書かれる．

上述のように境界外は稠密開集合をなすから，ベールのカテゴリー定理によって，可算個の開集合のどの境界も避けるような点の存在を保証できる．外部や境界の概念をフィルター空間において考えよう．

定義 4.34. $W \subseteq Q$ の外部とは，以下によって定義される開集合 $\mathrm{ext}(W) \subseteq Q$ である．

$$\mathrm{ext}(W) = \{p \in Q : \forall q \leqslant p.\ q \notin W\}.$$

以後，$W \subseteq Q$ に対して，$[W] = \bigcup_{p\in W}[p]$ と書く．

観察 4.35. フィルター空間 $\widehat{Q}$ の開集合 $U = [\underline{U}]$ に対して，$\mathrm{ext}(U) = [\mathrm{ext}(\underline{U})]$ が成立する．

Proof. 観察 4.27 の証明より，$U \cap [p] \neq \varnothing$ であることと $q \in \underline{U}$ となる $q \leqslant p$ が存在することは同値である．いま，$\mathrm{ext}(U) = \bigcup\{[p] : U \cap [p] = \varnothing\}$ であるから，これは $\bigcup\{[p] : \forall q \leqslant p.\ q \notin \underline{U}\}$ と書き直せるが，これは $[\mathrm{ext}(\underline{U})]$ と一致する． □

以上より，フィルター空間 $\widehat{Q}$ の任意の開集合 $U \subseteq \widehat{Q}$ について，以下が成立する．

$$x \in U \cup \mathrm{ext}(U) \iff (\exists p \in x)\ [p \in \underline{U} \text{ or } \forall q \leqslant p.\ q \notin \underline{U}]$$

定義 4.36. 計算可能準ポーランド空間 $X = \widehat{Q}$ において，$x \in X$ が **1-ジェネリック** (*1-generic*) とは，任意の枚挙可能開集合 $S \in \mathit{Open}\, X$ に対して，x が S の境界に属さないことである．

言い換えれば，フィルター F が 1-ジェネリックであるとは，任意の枚挙可能集合 $W \subseteq Q$ に対して，以下の条件を満たすことである．

$$(\exists p \in F)\ [p \in W \text{ or } \forall q \leqslant p.\ q \notin W]$$

命題 4.37. X が計算可能準ポーランド空間ならば，$\varnothing'$-計算可能な 1-ジェネリック点が存在する．

Proof. 枚挙可能集合 $Q \subseteq \mathbb{N}$ 上のフィルター空間 $X = \widehat{Q}$ を考える．$\mathbb{N}$ の枚挙可能部分集合全体の枚挙 $(W_e)_{e\in\mathbb{N}}$ が与えられたとき，$V_e = Q \cap W_e$ によって，Q の枚挙可能部分集合全体の枚挙も与えられる．いま，$W \subseteq Q$ が枚挙可能ならば，明らかに $\mathrm{ext}(W)$ は $\varnothing'$-枚挙可能である．したがって，$(V_e \cup \mathrm{ext}(V_e))_{e\in\mathbb{N}}$ は $\varnothing'$-枚挙可能列である．定理 4.31 のベールのカテゴリー定理プログラムにこれを入力すれば，共通点 $x \in \bigcap_{e\in\mathbb{N}}(V_e \cup \mathrm{ext}(V_e))$ が出力されるが，これは x が 1-ジェネリックであることを意味する．これは計算可能汎関数に $\varnothing'$-計算可能列を入力した結果として得られた出力なので，x もまた $\varnothing'$-計算可能である． □

ベールのカテゴリー定理プログラムの中身を見れば，直接証明も容易に得られる．

Proof (命題 4.37 の別証明). 実効ベールのカテゴリー定理 4.31 の証明のように，$\varnothing'$-計算可能な列 $p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots$ を構成する．p_e まで構成したとし，もし $q \leqslant p_e$ となる $q \in W_e$ が存在するならば，$p_{e+1} = q$ とし，さもなくば $p_{e+1} = p_e$ とする．このとき，フィルター $F = \{p \in Q : (\exists e)\ p_e \leqslant p\}$ を考える．前者が成立するならば，$p_{e+1} \in F$ かつ $p_{e+1} \in W_e$ であり，さもなくば，$p_e \in F$ かつ任意の $q \leqslant p_e$ に対して $q \notin W_e$ である．したがって，F は 1-ジェネリックである． □

4.4. 準ポーランド空間における算術的階層

ここからは，準ポーランド空間における算術的階層の概念について議論していこう．歴史的なコメントをしておくと，非ポーランド空間におけるボレル階層／算術的階層の定義が固まるまでにはかなりの時間を要した．非ポーランド空間の特別な例として，たとえば領域理論の ω-代数領域があるが，まずはこのような特別な例に対して徐々にボレル階層の概念が考案されるようになった．しかし，領域理論のような非 T_1 空間がメインの空間論においては，古典的なボレル階層の定義を用いると問題が生じるのである．これについて説明するために，準ポーランド空間において扱いやすいタイプの論理式を導入しておくことにする．

定義 4.38. 可算推移的集合 Q に対して，Q-論理式の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) 各 $p \in Q$ に対して，命題変数 $\dot{p}$ は Q-論理式である．
(2) φ, ψ が Q-論理式ならば，$\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$ もまた Q-論理式である．
(3) Q-論理式の可算列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\exists n \psi_n$ および $\forall n \psi_n$ もまた Q-論理式である．

注意. Q-論理式は自由変数を持たず，量化記号もまた変数を束縛しているわけではないので，厳密には $\bigvee_n \psi_n$ および $\bigwedge_n \psi_n$ という記号を用いた方が正確である．これはいわゆる $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ と呼ばれる無限論理の一種と関連している．

定義 4.39. フィルター空間 $\widehat{Q}$ における Q-論理式 φ の標準解釈 $[\![\varphi]\!]$ は以下によって与えられる．

$$[\![\dot{p}]\!] = [p] \qquad [\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!] \qquad [\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$$
$$[\![\neg\varphi]\!] = \widehat{Q} \setminus [\![\varphi]\!] \qquad [\![\exists n \psi_n]\!] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![\psi_n]\!] \qquad [\![\forall n \psi_n]\!] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\![\psi_n]\!]$$

ここで，$\varphi \to \psi$ は古典的に $\neg\varphi \vee \psi$ と解釈しておく．このとき，Q-論理式の標準解釈は，空間 $\widehat{Q}$ のボレル集合の構成に対応する．

$$\text{集合 } A \subseteq \widehat{Q} \text{ がボレル} \iff \text{ある } Q\text{-論理式 } \varphi \text{ が存在して } A = [\![\varphi]\!]$$

ボレル集合のあるところにボレル階層がある．ボレル階層の定義として，定義 2.10 をそのまま採用したいところであるが，準ポーランド空間においてはハウスドルフによる定義はあまり上手く機能しない．表面的には，ボレル階層は $\underset{\sim}{\Sigma}$ と $\underset{\sim}{\Pi}$ という 2 つの階層から構成されているように見えるが，実際には 1914 年のハウスドルフは閉集合を起点とする F-階層と開集合を起点とする G-階層を定義していたのである．

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{F} \subseteq \mathsf{F}_\sigma \subseteq \mathsf{F}_{\sigma\delta} \subseteq \mathsf{F}_{\sigma\delta\sigma} \subseteq \dots & \qquad & \mathsf{G} \subseteq \mathsf{G}_\delta \subseteq \mathsf{G}_{\delta\sigma} \subseteq \mathsf{G}_{\delta\sigma\delta} \subseteq \dots \\ \underset{\sim}{\Pi}_1 \subseteq \underset{\sim}{\Sigma}_2 \subseteq \underset{\sim}{\Pi}_3 \subseteq \underset{\sim}{\Sigma}_4 \subseteq \dots & & \underset{\sim}{\Sigma}_1 \subseteq \underset{\sim}{\Pi}_2 \subseteq \underset{\sim}{\Sigma}_3 \subseteq \underset{\sim}{\Pi}_4 \subseteq \dots \end{array}$$

ここで，F は閉集合全体の族，G 開集合全体の族を表し，また，X-集合たちの可算和で書けることを X_σ, 可算共通部分で書けることを X_δ と記す．定義 2.10 は F-, G-階層と等価な定義を行っていることを確認できる．ポーランド空間においては，F-階層と G-階層は各ステップで合流するが，準ポーランド空間の場合には，F-階層と G-階層は一度も合流せずに並列な階層を築くということがあり得る．

ボレル集合の定義 2.8 は，開集合を起点として可算和と補集合の組合せで集合を構成するものである．一方で，F-階層と G-階層は，開集合または閉集合のいずれかのみを起点として可算和と可算共通部分の組合せで集合を構成する．どちらも等価だと思うかもしれないが，後者の場合には，最初に開集合起点か閉集合起点かを決めるので，一般的には開集合と閉集合を両方同時に取り扱えない．

例 4.40. F-, G-階層には属さないボレル集合が存在する．たとえば，3 点 $\{0,1,2\}$ からなる位相空間を考える．ここで，自然数の順序における上方集合を開集合とする．

$$\varnothing, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}$$

このとき，$\{1\}$ はボレル集合であるが，F-, G-階層には属さない．ボレル集合であることは，開集合と閉集合の共通部分として書けることから分かる．実際，閉集合 $\{0,1\}$ と開集合 $\{1,2\}$ について，$\{1\} = \{0,1\} \cap \{1,2\}$ である．一方，F-階層に属す集合は常に下方集合であり，G-階層に属す集合は常に上方集合であることを帰納的に示すことができる．しかし，$\{1\}$ は上方集合でも下方集合でもない．

雑談. 上記の例を分析すると，$\underset{\sim}{\Sigma}_1 := \mathsf{G}$ について，包含関係 $\underset{\sim}{\Sigma}_1 \subseteq \mathsf{F}_\sigma$ は成り立たない．包含関係 $\underset{\sim}{\Sigma}_1 \subseteq \mathsf{F}_\sigma$ を満たす位相空間（つまり，すべての開集合が閉集合の可算和として表せる空間）には，G_δ-空間という特別な名前が付いている．

$$\text{距離化可能空間} \implies \mathsf{G}_\delta\text{-空間} \implies T_1\text{-空間}$$

特に任意のポーランド空間は G_δ-空間であるが，準ポーランド空間は G_δ-空間であるとは限らない．したがって，$\underset{\sim}{\Sigma}_2 := \mathsf{F}_\sigma$ という定義を採用すると，準ポーランド空間においては $\underset{\sim}{\Sigma}_1 \nsubseteq \underset{\sim}{\Sigma}_2$ となってしまう．ポーランド空間においては，定義 2.10 のように $\underset{\sim}{\Sigma}_2 := \mathsf{F}_\sigma$ として定義されるのが一般的であり，実際にそれで不都合が無いことは，ポーランド空間が G_δ-空間であるという事実から保証されているとも言える．

以上の観察から，ボレル階層の定義には補正が必要そうであると考えられる．どう補正すべきかということを考えると，そもそもボレル集合の定義 2.8 にせよ，ボレル階層の定義 2.10 にせよ，オッカムの剃刀によって削ぎ落とされたミニマルな定義になっている点に注目する．たとえば，ボレル集合の背後には「（可算的）記

述可能性」というアイデアがあるが，実際には可算和と補集合だけで他の集合演算も記述できるので，その他の集合演算はオッカムの剃刀によって削ぎ落とされた．ボレル階層もまた同様である．

オッカムの剃刀は，特定の条件下では不要であったものを削ぎ落とすが，設定を一般化するなどしたとき，実は削ぎ落とされたものが不要でなかったことが分かることがある．削ぎ落とされた後の定義を一般化しても，既に削ぎ落としてしまったものは復元されない．削ぎ落とされる前にあった根源的アイデアを一般化しなければならない．概念の一般化の際には，オッカムの剃刀のようなミニマリスト思想は捨てて，むしろマキシマリストになるべきである．

マキシマリストにとって，ボレル集合とは「可算的記述可能性」であり，可算和と補集合以外にも可算共通部分やその他のブール演算等を用いて記述可能な集合である．ボレル階層もまた同様であり，可算和と可算共通部分以外のブール演算を考慮に入れた階層構造を考えるべきである．

定義 4.41. $\utilde{\Sigma}_k$ 集合および $\utilde{\Pi}_k$ 集合の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) $\utilde{\Sigma}_1$ 集合とは開集合のことであり，$\utilde{\Pi}_1$ 集合とは閉集合のことである．
(2) $\utilde{\Sigma}_{k+1}$ 集合とは，$(\utilde{\Sigma}_\ell, \utilde{\Pi}_\ell)_{\ell \leqslant k}$ に属す集合の有限ブール結合たちの可算和である．
(3) $\utilde{\Pi}_{k+1}$ 集合とは，$(\utilde{\Sigma}_\ell, \utilde{\Pi}_\ell)_{\ell \leqslant k}$ に属す集合の有限ブール結合たちの可算共通部分である．

また，$\utilde{\Sigma}_k$ かつ $\utilde{\Pi}_k$ であるような集合を $\utilde{\Delta}_k$ 集合と呼ぶ．ハウスドルフによるボレル階層の定義 2.8 における $\utilde{\Sigma}_k$ 集合を以後は狭義 $\utilde{\Sigma}_k$ 集合と呼ぶことにする．

例 4.42. G_δ-空間とは，$\utilde{\Sigma}_2 = \mathsf{F}_\sigma$ を満たす空間である．実際，G_δ-空間においては，定理 4.41 の意味での $\utilde{\Sigma}_k$ 集合と狭義 $\utilde{\Sigma}_k$ 集合が一致する．

一般化を行った後は，再びオッカムの剃刀で不要な部分を削ぎ落としてもよい．我々は古典論理の下で議論しているので，常に冠頭標準形に変形してよい．たとえば，$\utilde{\Sigma}_{2k+1}$ 集合 A は必ず以下のように表すことができる．

$$A = \bigcup_{n_1}\bigcap_{n_2}\bigcup_{n_3}\cdots\bigcap_{n_{2k}} B_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{2k}}$$

ここで，最も内側の集合 $B_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{2k}}$ は，開集合の有限ブール結合である．言い換えれば，開集合の有限ブール結合の外側にある可算演算の個数 $+1$ がボレル階層の階数に相当する．

ボレル階層に相当する論理式の階層を導入しておくと便利である．冠頭標準形を前提としてもよいが，まずはマキシマリストの定義 4.41 に基づいて，論理式の階層を定義してみると，以下のように少し煩雑になる．

例 4.43 (論理式の階層の定義案)**.** Q-論理式に対する $\utilde{\Sigma}_k$ および $\utilde{\Pi}_k$ の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) $\dot{p}$ は $\utilde{\Sigma}_1$ である．
(2) φ が $\utilde{\Sigma}_k$ ならば $\neg\varphi$ は $\utilde{\Pi}_k$ であり，φ が $\utilde{\Pi}_k$ ならば $\neg\varphi$ は $\utilde{\Sigma}_k$ である．
(3) $\utilde{\Sigma}_k$ または $\utilde{\Pi}_k$ ならば階数 k 以下であり，階数 k 以下ならば $\utilde{\Sigma}_{k+1}$ かつ $\utilde{\Pi}_{k+1}$ である．

$$\utilde{\Sigma}_k, \utilde{\Pi}_k \implies \text{階数} \leqslant k \implies \utilde{\Sigma}_{k+1}, \utilde{\Pi}_{k+1}$$

(4) 命題結合子 $\land, \lor, \to, \neg$ は階数を上げない．
(5) $\utilde{\Sigma}_k$-論理式の可算列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\exists n\psi_n$ は $\utilde{\Sigma}_k$-論理式である．

(6) $\underset{\sim}{\Pi}_k$-論理式の可算列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\forall n\psi_n$ は $\underset{\sim}{\Pi}_k$-論理式である．

定義 2.8 と比べると複雑なので，少し簡易化できないかについて考えたい．もちろん冠頭標準形を考えれば，$k \geqslant 3$ について，(3),(4) は省略することができる．次に，冠頭標準形の最も内側の量化の部分に注目しよう．$\underset{\sim}{\Pi}_{2k+1}$ または $\underset{\sim}{\Sigma}_{2k+2}$ 集合の場合には左側の形式，$\underset{\sim}{\Sigma}_{2k+1}$ または $\underset{\sim}{\Pi}_{2k+2}$ 集合の場合には右側の形式になっている．

$$\cdots \bigcup_n B_n \qquad\qquad \cdots \bigcap_n B_n$$

ここで B_n は開集合の有限ブール結合である．最も内側の量化のみに注目すると，左は $\underset{\sim}{\Sigma}_2$ 集合であり，右は $\underset{\sim}{\Pi}_2$ 集合である．まず，$\underset{\sim}{\Sigma}_2$ 集合は必ず以下の形式で書けることに注目しよう．

補題 4.44 (標準形補題)**.** A が $\underset{\sim}{\Sigma}_2$ 集合であるとは，$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \cap C_n)$ となる開集合列 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と閉集合列 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在することである．

Proof. $A = \bigcup_n S_n$ を $\underset{\sim}{\Sigma}_2$ 集合とする．ここで，各 S_n は開集合の有限ブール結合である．開集合の有限ブール結合もまた標準形を考えれば，以下の形で表すことができる．

$$\bigcup_{i<t}\left(\bigcap_{j<u} F^n_{ij} \cap \bigcap_{k<v} G^n_{ik}\right)$$

ここで F_{ij} は閉集合であり，G_{ik} は開集合である．したがって，$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を G_{ik} たちの枚挙，$(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を F_{ij} たちの枚挙とすればよい． □

論理式で記述するならば，$\underset{\sim}{\Sigma}_2$ 集合は $\exists n\,(\varphi_n \wedge \neg\psi_n)$ の形で記述できるということである．ここで φ_n および ψ_n は $\underset{\sim}{\Sigma}_1$ である．この否定を取れば，$\underset{\sim}{\Pi}_2$ 集合は $\forall n\,(\neg\varphi_n \vee \psi_n)$ の形で記述できる．古典論理の下では，この式は $\forall n\,(\varphi_n \to \psi_n)$ と同値である．この形状の論理式は，あらゆる文脈において非常に自然に現れるものである．たとえば，量化範囲を限定している状況下では，常にこの形状の式を考えているようなものである．

$$\exists x \in A.\varphi(x) \equiv \exists x\,(x \in A \wedge \varphi(x)) \qquad\qquad \forall x \in A.\varphi(x) \equiv \forall x\,(x \in A \to \varphi(x))$$

このアイデアに倣って，$\exists n\,(\varphi_n \wedge \neg\psi_n)$ を $\exists n \in \varphi.\psi_n$ と略記し，$\forall n\,(\varphi_n \to \neg\psi_n)$ を $\forall n \in \varphi.\psi_n$ と略記する．つまり，量化範囲を $\underset{\sim}{\Sigma}_1$ 論理式で制限した式であると考える．そうすると，標準形補題 4.44 より，たとえば $\underset{\sim}{\Pi}_{2k}$ 集合は以下のような式で記述できる．

$$\forall n_1 \in \theta_1.\exists n_2 \in \theta_2.\forall n_3 \in \theta_3.\dots.\exists n_{2k} \in \theta_{2k}.\dot{p}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_{2k}}$$

ここで，各 θ_i は $\underset{\sim}{\Sigma}_1$ 論理式である．実際には，標準形補題 4.44 より，量化範囲の制限は最も内側の量化だけ行えばよい．ともあれ，量化範囲の制限を組み込むと，ボレル階層の階数と量化記号の数を正確に対応させることができる．以上の観察に基づき，論理式の階層を以下によって定義する．

定義 4.45. $\underset{\sim}{\Sigma}_k$ および $\underset{\sim}{\Pi}_k$ の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) $\dot{p}$ は $\underset{\sim}{\Sigma}_1$ である．

(2) φ が $\underset{\sim}{\Sigma}_k$ ならば $\neg\varphi$ は $\underset{\sim}{\Pi}_k$ である．

(3) $\underset{\sim}{\Sigma}_1$-論理式の可算列 $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\exists n\psi_n$ は $\underset{\sim}{\Sigma}_1$ である．

(4) $\underset{\sim}{\Sigma}_k$-論理式の可算列 $(\theta_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\exists n \in \theta.\neg\psi_n$ は $\underset{\sim}{\Sigma}_{k+1}$ である．

観察 4.46. 集合 $A \subseteq \widehat{Q}$ が $\underset{\sim}{\Sigma}_k$ 集合であることと，$\underset{\sim}{\Sigma}_k$-論理式 φ について $A = [\![\varphi]\!]$ となることは同値である．

Proof. 標準形補題 4.44 から直ちに従う． □

■算術的階層: 上で注意したように，Q-論理式は自由変数を持たないため，量化子は変数の束縛をしているわけではなく，添字の束縛をしている．たとえば，以下の Q-論理式について考えてみよう．

$$\exists n_1 \forall n_2 \exists n_3 \dots \forall n_\ell.\ \dot{p}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_\ell}$$

添字に対する束縛を解消するためには，命題変数 $\dot{p}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_\ell}$ を考える代わりに述語 $\dot{q}(n_1, n_2, n_3, \dots, n_\ell) := \dot{p}_{n_1 n_2 n_3 \dots n_\ell}$ を考えれば解決できそうである．いま，$\dot{Q} = \{\dot{p} : p \in Q\}$ とすれば，述語 $\dot{q}$ は関数 $\dot{q} \colon \mathbb{N}^\ell \to \dot{Q}$ とみなすことができる．

定義 4.47. 枚挙近似系 $(Q, <)$ に対して，算術的 Q-論理式の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) 計算可能関数 $\dot{q} \colon \mathbb{N}^\ell \to \dot{Q}$ に対して，$\dot{q}(n_1, \dots, n_\ell)$ は算術的 Q-論理式である．

(2) φ, ψ が算術的 Q-論理式ならば，$\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$ もまた算術的 Q-論理式である．

(3) 算術的 Q-論理式 $\psi(n, \bar{m})$ に対して，$\exists n\psi(n, \bar{m})$ および $\forall n\psi(n, \bar{m})$ もまた算術的 Q-論理式である．

元々の Q-論理式とは異なり，算術的 Q-論理式は有限個の自然数パラメータを含んでよい．また，この定義において，計算可能性に関する要件があることに注意する．算術的 Q-論理式 φ の標準解釈 $[\![\varphi]\!]$ は，先程と同様の方法によって与えられる．ある算術的 Q-論理式 φ に対して $A = [\![\varphi]\!]$ となる集合 $A \subseteq \widehat{Q}$ を**算術的集合** (*arithmetical set*) と呼ぶ．

算術的 Q-論理式に対しても，量化記号に対する略記を用いる．たとえば，$\exists n\,(\theta(n, \bar{m}) \wedge \neg\psi(n, \bar{m}))$ を $\exists n \in \theta(\bar{m}).\ \neg\psi(n, \bar{m})$ と略記する．

定義 4.48. 枚挙近似系 $(Q, <)$ に対して，Σ_k および Π_k の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) 計算可能関数 $\dot{q} \colon \mathbb{N}^\ell \to \dot{Q}$ に対して，$\dot{q}(n_1, \dots, n_\ell)$ は Σ_1 である．

(2) φ が Σ_k ならば $\neg\varphi$ は Π_k である．

(3) $\psi(n, \bar{m})$ が Σ_1 ならば，$\exists n\psi(n, \bar{m})$ もまた Σ_1 である．

(4) $\theta(n, \bar{m}), \psi(n, \bar{m})$ が Σ_k ならば，$\exists n \in \theta(\bar{m}).\ \neg\psi(n, \bar{m})$ は Σ_{k+1} である．

後の都合上，狭義 Σ_k および狭義 Π_k の定義も明示的に与えておく．

定義 4.49. 算術的 Q-論理式に対する狭義 Σ_k および狭義 Π_k の概念を以下のように帰納的に定義する．

(1) 計算可能関数 $\dot{q} \colon \mathbb{N}^{\ell+1} \to \dot{Q}$ に対して，$\exists m.\ \dot{q}(m, n_1, \dots, n_\ell)$ は狭義 Σ_1 である．

(2) φ が狭義 Σ_k ならば $\neg\varphi$ は狭義 Π_k である．
(3) $\psi(n,\bar{m})$ が狭義 Π_k ならば，$\exists n\psi(n,\bar{m})$ は狭義 Σ_{k+1} である．

定義 4.50. 集合 $A \subseteq \hat{Q}$ が Σ_k 集合であるとは，Σ_k-論理式 φ について $A = [\![\varphi]\!]$ となることである．Π_k 集合等も同様の方法で定義される．Σ_k かつ Π_k であるような集合を Δ_k 集合と呼ぶ．

通常の論理式がゲーデル数という自然数でコードできるのと同様の理由によって，算術的 Q-論理式もまた自然数でコードできる．通常の論理式の場合には，あくまで論理式は有限記号列であることから，有限ビット列に置き換えればよい．算術的 Q-論理式の場合には，定義中に計算可能関数 $\dot{q}$ が含まれるが，この部分については，$\dot{q}$ を計算するプログラムという有限記号列に置き換えてしまえばよい．この補正によって，算術的 Q-論理式もまた単なる有限記号列だと思えるから，有限ビット列あるいは自然数としてコードされる．

§5. 次数の理論

5.1. クリーネ-ポストの定理

1954 年のクリーネ-ポストの論文 [?] は，チューリング次数の理論を打ち立てた最初の論文とされる．もちろん，神託機械の概念は 1930 年代のチューリング，そしてチューリング還元の概念は 1944 年のポスト [?] によるが，その時点ではまだ系統立った理論は確立していなかった．チューリング次数に関する重要な問題は提示されていたものの，非自明な結果を得るに至る技術は整っていなかった．チューリング次数の性質を分析するための最初の技術を与えものが，クリーネ-ポストの論文であり，その技術を現代的な観点で説明するならば，それは実効ベールのカテゴリー定理である．

チューリング次数に関する最初の問題は，決定可能な問題と停止問題の間のチューリング次数を持つ決定問題，つまり中間チューリング次数の存在を問う問題であった．

$$(\exists f) \quad \varnothing <_T f <_T \varnothing'?$$

1944 年のポストの問題はもう少し強い要求を含むが，ここではまずはこの中間チューリング次数の問題に取り組むことにしよう．先に結論を言ってしまえば，命題 4.37 を全域関数の空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ あるいは $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に適用して得られた 1-ジェネリック点が，この中間次数の問題の解である．クリーネ-ポストの定理のアイデアの本質に迫るならば，1-ジェネリックを利用して「Σ_1-真理値の有限強制」を図るものである．

アイデアを述べるために，$f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のチューリング・ジャンプとは何であったかを思い出しておこう．チューリング・ジャンプは，以下の 2 つのいずれかの方法によって定義できる．

- 入力 e に対して，e 番目の f-相対的計算 $\Phi_e(f)$ が停止するか否かを判定する．
- 入力 e に対して，e 番目の Σ_1 論理式 $\exists n P_e(n,f)$ が真か偽かを判定する．

後者の定義に注目するならば，f のチューリング・ジャンプとは，「f に関する Σ_1-真理値」である．計算可能準ポーランド空間 X の枚挙可能開部分集合全体を $\Sigma_1(X)$ と書くならば，$x \in X$ のチューリングジャンプは，おおよそ以下の関数である．

$$\in_x : \Sigma_1(X) \to 2 \qquad\qquad \in_x(U) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in U \\ 0 & \text{if } x \notin U \end{cases}$$

さて，$\in\colon X\times\Sigma_1(X)\to\mathbb{S}$ は計算可能であるが，$\in\colon X\times\Sigma_1(X)\to 2$ は連続ですらない．しかし，ジェネリック点上に制限すれば連続になる，というのが次の観測である．

補題 5.1 (概連続補題)**.** 計算可能準ポーランド空間 X の 1-ジェネリック点全体を $G_1(X)$ と書くとすると，$\in\colon G_1(X)\times\Sigma_1(X)\to 2$ は $\varnothing'$-計算可能である．

主張を言い換えれば，1-ジェネリック点 x と枚挙可能開集合 U の枚挙が与えられたとき，$\varnothing'$ の情報を用いて $x\in U$ か否かの判定を行うことができる．これは $x\cap\underline{U}\neq\varnothing$ か否かの判定を行うことと同値であることにも注意しておこう．

Proof. フィルター空間 $X=\widehat{Q}$ の 1-ジェネリック点，つまり Q 上の 1-ジェネリック・フィルター $G\subseteq Q$ が与えられているとする．このとき，計算可能開集合 $U\subseteq X$ に対して，1-ジェネリック性より，$G\in U$ または $G\in\mathrm{ext}(U)$ が成立する．言い換えれば，以下が成立する．

$$(\exists p\in G)\;p\in\underline{U}\qquad\text{or}\qquad(\exists p\in G)(\forall q<p)\;q\notin\underline{U}$$

このどちらが成立するかの判定を行いたい．停止問題 $\varnothing'$ を用いれば，任意の $q<p$ に対して $q\notin\underline{U}$ か否かの判定をできる．いま，入力 G のコードは，$G\subseteq Q$ の元の枚挙である．ある p が G に枚挙される度に，$\varnothing'$ を用いて前者が成立するか後者が成立するかを判定する．仮定より，いずれ前者または後者が成立するはずであるから，もし前者ならば 1 を出力，後者ならば 0 を出力する．

したがって，$\varnothing'$-計算可能な方法で $G\in U$ または $G\in\mathrm{ext}(U)$ の判定が行われた．1-ジェネリック性の仮定より，$G\notin U$ であることと $G\in\mathrm{ext}(U)$ であることは同値である．以上より，これは，$\in$ を $\varnothing'$-計算するアルゴリズムを与える．$\square$

これがクリーネ-ポストの鍵となるアイデア「Σ_1-真理値の有限強制」である．補題の主張を見る限りでは，「Σ_1-真理値の連続強制」と言った方が妥当であると思うかもしれないが，クリーネ-ポストは 1-ジェネリック点全体を俯瞰していたのではなく，一つの 1-ジェネリック点に注視していた．2 値連続関数の値は，入力の有限情報を読み込んだ時点で確定するから，つまり，1-ジェネリック点に対する Σ_1-真理値が有限的に確定したことになる．クリーネ-ポストの証明に立ち返ると，Σ_1-論理式の真理値を，順次，有限的に強制させながらジェネリック点の具体的構成を行っていたので，彼らにとっては，この補題は「Σ_1-真理値の有限強制」であったのである．

補題 5.1 によって，1-ジェネリック点 x に関する Σ_1 論理式の真偽判定が Δ_2 であることが導かれる．停止問題に関する Σ_1 論理式の真偽判定は Σ_2-完全であることから，これは 1-ジェネリック点と停止問題との大きな違いを明らかにするものである．このアイデアによって，1-ジェネリック関数 $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\varnothing<_T f<_T\varnothing'$ が成り立つことを示すことができる．

定理 5.2 (クリーネ-ポストの定理)**.** 中間チューリング次数が存在する．つまり，$\varnothing<_T f<_T\varnothing'$ となる $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する．

Proof. 命題 4.37 より，$\varnothing'$-計算可能な 1-ジェネリック点 $f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する．さて，任意の計算可能関数 $g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\setminus\{g\}$ が枚挙可能開集合である．いま，g はこの境界なので，f が 1-ジェネリックである

ことから $f \neq g$ が導かれる．すなわち，f は計算不可能である．

よって，$\varnothing <_T f \leqslant_T \varnothing'$ であるから，後は $\varnothing' \nleqslant_T f$ を示せばよい．点 f のチューリング・ジャンプ f' とは，正確には，$f' = \{e \in \mathbb{N} : \Phi_e(f)\downarrow\}$ であった．計算可能汎関数 Φ_e はある計算可能関数 φ_e によって生成されるので，$\underline{V}_e = \{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \varphi_e(\sigma)\downarrow\}$ とすれば，$\Phi_e(f)\downarrow$ と $f \in V_e := [\underline{V}_e]$ であることは同値である．つまり，$f' = \{e : f \in V_e\}$ と表せるから，$f'(e) = \in(f, V_e)$ である．

計算可能性について議論すると，$V = \lambda e.V_e : \mathbb{N} \to \Sigma_1(X)$ は計算可能であり，また，概連続補題 5.1 より $\in$ は $\varnothing'$-計算可能であるから，$\in_f = \lambda V.\in(f, V)$ は $f \oplus \varnothing'$-計算可能である．

$$f' : \mathbb{N} \xrightarrow{V} \Sigma_1(X) \xrightarrow{\in_f} 2$$

つまり，$f' = \lambda e.\in_f(V_e)$ であるから，$f' \leqslant_T f \oplus \varnothing'$ を得る．もし $\varnothing' \leqslant_T f$ ならば，$f' \leqslant_T f \oplus \varnothing' \equiv_T f$ となり，チューリングの定理 $f <_T f'$ に反するので，$\varnothing' \nleqslant_T f$ を得る． $\square$

注意． 概連続補題 5.1 には，解析学的な説明が付く．リトルウッドの実解析学の三原理のうち一つは「良い関数はおおよそ連続」であることを述べる．この原理自体は測度論的観察に基づくもので，ここでの話と直接的な関係はないが，その位相的対応物が存在する．その定理（標準的な教科書 [**?**, Theorem 8.38] を参照）によれば，

ベール空間から第二可算空間へのベール可測関数は，十分にジェネリックな点に制限すれば，連続である．

この主張の正確な意味を現時点で理解する必要はないが，特に準ポーランド空間上の Σ_1-真理値関数は，十分にジェネリックな点に制限すれば，連続であるということが導かれる．この計算論的詳細を分析したものが，概連続補題 5.1 と言ってよいであろう．もちろん，Σ_1-真理値関数は，既に連続にかなり近い関数であり，一般的なベール可測関数に関する上記の主張を持ち出すのは，牛刀をもって鶏を割くようなものである．しかし，それはまだクリーネ-ポストの定理という，計算可能性理論の最初期の定理を議論している段階だからであり，高度な計算可能性理論の定理を導くにあたっては，上記の主張は適切な道具となる．

1954 年のクリーネ-ポストの論文では，単なる中間チューリング次数の存在だけではなく，数多くの結果が示されている．たとえば，順序構造に対する他の基本的な問題として，その順序構造が全順序をなすかというものがあるだろう．

$$\forall A, B\ [A \leqslant_T B \text{ or } B \leqslant_T A]\ ?$$

クリーネ-ポストはこの問題に否定的な解決を与えている．実際，さらに精密な結果として，彼らは比較不可能な中間チューリング次数が無数に存在することを示している．

定理 5.3 (クリーネ-ポスト)**.** $f \nleqslant_T g$ かつ $g \nleqslant_T f$ となるような全域関数 $f, g \leqslant_T \varnothing'$ が存在する．

Proof. アイデアは，部分汎関数 $\Phi :\subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ のグラフ $\{(f, g) : \Phi(f) = g\}$ を考えるものであるが，部分関数であるから，グラフの定義には少しの注意を払う必要がある．部分関数 $\Phi :\subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して，グラフ $G(\Phi)$ は以下のように定義されると考えられる．

$$G(\Phi) = \{(f, g) \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} : (\forall n.\ \Phi(f)(n)\downarrow) \text{ and } \Phi(f) = g\}$$

しかし，ここではグラフの定義を少し補正した以下の $\tilde{G}(\Phi)$ も考える．

$$\tilde{G}(\Phi) = \{(f,g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n\,[\Phi(f)(n)\downarrow \implies \Phi(f)(n) = g(n)]\}$$

この $\tilde{G}(\Phi)$ の補集合を $H(\Phi)$ と書く．もし Φ が計算可能ならば，$H(\Phi)$ は枚挙可能開集合である．このとき，$G(\Phi) \subseteq \tilde{G}(\Phi)$ であるから，$G(\Phi) \cap H(\Phi) = \varnothing$ である．いま，$G(\Phi)$ が $H(\Phi)$ の境界に含まれることを示そう．$(f,g) \in G(\Phi)$ の任意の近傍に，$h \neq g$ となる $(f,h) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在するが，$\Phi(f) = g \neq h$ であるから，$(f,h) \in H(\Phi)$ を得る．したがって，(f,g) は $H(\Phi)$ の境界に属す．

命題 4.37 より，$(f,g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を $\varnothing'$-計算可能な 1-ジェネリックとする．もし $f \leqslant_T g$ ならば，ある部分計算可能関数 Φ が存在して，$\Phi(f) = g$ である．つまり，$(f,g) \in G(\Phi)$ である．しかし，1-ジェネリック (f,g) は，計算可能開集合 $H(\Phi)$ の境界には属し得ないので，これはあり得ない．したがって，$f \not\leqslant_T g$ を得る．対称的な議論より，$g \not\leqslant_T f$ も得る． □

注意． 中間チューリング次数の問題に関する別解として，ランダム性（第 6 節参照）を利用するものがある．最適機械の**停止確率** (*halting probability*) を Ω と書くとき，Ω はマーティン-レフ・ランダム実数と呼ばれるものになる [?]．$\Omega_{\rm odd}$ を Ω の奇数桁，$\Omega_{\rm even}$ を Ω の偶数桁を取り出したものとする．Ω の各桁の値はランダムであるから，奇数桁の情報から偶数桁の情報を予測できないし，偶数桁の情報から奇数桁の情報を予測することもできない．このアイデアを形式化すると，$\Omega_{\rm odd} \not\leqslant_T \Omega_{\rm even}$ かつ $\Omega_{\rm even} \not\leqslant_T \Omega_{\rm odd}$ を導くことができる．

$$\varnothing <_T \Omega_{\rm odd}, \Omega_{\rm even} <_T \Omega \equiv_T \varnothing' \qquad\qquad \Omega_{\rm odd} \not\leqslant_T \Omega_{\rm even} \qquad\qquad \Omega_{\rm even} \not\leqslant_T \Omega_{\rm odd}$$

もちろん，ジェネリック性は位相的典型性であり，ランダム性は確率的典型性であるから，何らかの類似性があるものだと予期できる．この中間チューリング次数に関する結果は，その類似性を利用したものと言えよう．ジェネリック性を用いた比較不可能チューリング次数の構成は，クラトフスキ-ウラムの定理の類似物であり，ランダム性を用いた比較不可能チューリング次数の構成は，フビニの定理の類似物であるとみなすこともできる．

さて，ジェネリック性とランダム性のいずれを用いても比較不可能チューリング次数の構成は達成できるが，位相的典型性と確率的典型性の振る舞いは，全く同じというわけではない．位相的典型性（コーエン強制法）や確率的典型性（ランダム強制法）をはじめとする様々なタイプの典型性の繊細な差異を明らかにしていくのが，強制法の理論の真髄である．

5.2. 算術的強制法

クリーネ-ポストのアイデアは，「Σ_1-真理値の有限強制」であったが，同様のアイデアによって「Σ_n-真理値の有限強制」を行う方法はあるだろうか．ベールのカテゴリー定理の手法は確かに強力であるものの，単独では，開集合にしか通用しない．つまり，枚挙可能性や停止問題といった概念の分析には有用であるが，算術的階層の Δ_2 以降はもはや開集合としては表されない．したがって，そのような位相的に複雑な集合を制御する技法が必要となる．そのための 1 つの概念が，開集合による近似可能性を保証する**ベールの性質** (*Baire property*) というものである．

- 以下のような意味で，任意のボレル集合 $A \subseteq X$ を開集合 $B \subseteq X$ によって近似できる．

“典型的な” $x \in X$ に対して「$x \in A \iff x \in B$」が成立する．

位相空間におけるベールの性質との関連性については後で説明する．ともあれ，典型的な点に対するボレル的条件は開な条件に置き換えることができる．算術的論理式 $\varphi(x)$ はボレル集合 $\{x : \varphi(x)\}$ を定義するから，これが開集合，すなわちパラメータ付き Σ_1 論理式 $\{x : \psi(x, \alpha)\}$ によって近似される．すなわち，「ボレル集合の開集合近似」を与えるベールの性質とは，「算術的真理の Σ_1 近似」を与えるものとして理解できる．

- 以下のような意味で，任意の算術的論理式 $\varphi(x)$ を Σ_1 論理式 $\psi(x, \alpha)$ によって近似できる．

$$\text{“典型的な” } x \in X \text{ に対して「} \varphi(x) \iff \psi(x, \alpha) \text{」が成立する．}$$

このアイデアを用いると，典型的な点に関する算術的性質は Σ_1 式によって書き直せることを期待できそうである．この「真理の開集合近似」を計算可能性理論で活用するためには，「典型的」とは何であるか，パラメータ α は何であるか，などを正確に調査する必要がある．

■強制法: 我々がここで用いるものは**強制法** (*forcing*) と呼ばれる手法の非常に弱い形である．歴史的背景を述べると，第 2.3 節で述べたように，19 世紀末から数多くの研究者が連続体仮説と呼ばれる問題に取り組んでいた．多くの研究者の努力にも関わらず，連続体仮説には誰も太刀打ちできず，長きに渡り未解決問題として立ちはだかっていたのだが，それも無理のないことであった．なぜなら，これはある意味では「絶対に解けない問題」であったからである．1963 年，コーエン (Paul Cohen) は，標準的な数学的体系，すなわち ZFC 集合論からは連続体仮説の肯定も否定も証明できないことを示したのである．このときにコーエンが導入した手法がいわゆる強制法である．

ともあれ，コーエンの強制法は，様々な種類の「典型性」の概念を制御するための強力な技術である．コーエン自身による典型性（ジェネリック性）の説明をここに引用しておこう．

> 主要点として，a には M に関する “特別” な情報を含ませたくない [...] 我々が構成する a は，M-相対的に “ジェネリック” な集合と呼ばれる．アイデアはこうだ．a に関するすべての性質は，a が M において “ジェネリック” な集合のように振る舞うという点だけに基づいて，“強制” されなければならない．[*18]

ともあれ，コーエンの強制法はすぐに様々な研究者によって理論的な整備を与えられ，また，様々な亜種も生まれた．そのうちの一つは，1965 年のフェファーマン (Solomon Feferman) による論文「強制法とジェネリック集合の概念のいくつかの応用 (Some applications of the notions of forcing and generic sets)」において導入された**算術的強制法** (*arithmetical forcing*) と呼ばれる手法である．

定義 5.4 (強制関係)**.** 計算近似系 $\mathbb{P}$ に対して，$p \in \mathbb{P}$ と算術的 $\mathbb{P}$-論理式 φ の間の関係 $p \Vdash \varphi$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcl} p \Vdash \dot{q} & \iff & p < q \\ p \Vdash \varphi \vee \psi & \iff & p \Vdash \varphi \text{ or } p \Vdash \psi \\ p \Vdash \neg\psi & \iff & q \nVdash \psi \text{ for all } q < p \\ p \Vdash \exists n.\psi(n) & \iff & p \Vdash \psi(n) \text{ for some } n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

[*18] 引用元: P. Cohen, “Set Theory and the Continuum Hypothesis [**?**]”. 原文: The chief point is that we do not wish a to contain “special” information about M, [...] The a which we construct will be referred to as a “generic” set relative to M. The idea is that all the properties of a must be “forced” to hold merely on the basis that A behaves like a “generic” set in M.

$\mathbb{P}$ 上のフィルター G に対して，$G \Vdash \varphi$ であるとは，ある $p \in G$ が存在して $p \Vdash \varphi$ を満たすこととする．この関係 $\Vdash$ は**強制関係** (*forcing relation*) と呼ばれる．

関係 $p \Vdash \varphi$ が成立するとき，p は φ を強制する (p forces φ) と言う[*19]．明示していない論理式については，同値変形を用いて強制関係を導出する．たとえば，$\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ と考えれば，以下を得る．

$$p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff \forall q < p \, \exists r < q \, (r \Vdash \varphi \text{ and } r \Vdash \psi). \tag{5.1}$$

例 5.5. 定義 4.36 では 1-ジェネリック性の概念を境界を用いて定義したが，強制関係を用いると，これは Σ_1 論理式の真偽の強制可能性として表せることが分かる．つまり，$G \in \widehat{\mathbb{P}}$ が 1-ジェネリック・フィルターであるとは，任意の Σ_1 論理式に対して，$G \Vdash \varphi$ または $G \Vdash \neg\varphi$ が成立することである．

この強制関係は，「真理の開集合近似」を与えるものである．これを確認するために，$\mathsf{Force}(\varphi)$ を以下によって定義しよう．

$$\mathsf{Force}(\varphi) = \{G \in \widehat{\mathbb{P}} : G \Vdash \varphi\} = \{G \in \widehat{\mathbb{P}} : \exists p \in G. \, p \Vdash \varphi\}.$$

観察 5.6. 任意の算術的論理式 φ について，$\mathsf{Force}(\varphi)$ は開集合である．

Proof. $W = \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi\}$ とする．このとき，$\mathsf{Force}(\varphi) = \bigcup_{p \in W} [p]$ であるから，これは明らかに開集合である． □

また，以下のように強制関係は単調なので，$\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi\}$ は $\mathbb{P}$ の開集合にもなっている．

観察 5.7 (単調性)**.** 任意の $p, q \in \mathbb{P}$ に対して，$q < p \Vdash \varphi$ ならば $q \Vdash \varphi$ である．

さて，ここで否定式が具体的にどのように開集合によって近似されているかを見るのは重要である．以下のように，否定式の強制は，集合の外部を取っていることが分かる．

補題 5.8. $\mathsf{Force}(\neg\psi) = \mathrm{ext}(\mathsf{Force}(\psi))$ である．

Proof. 外部の定義より，$G \in \mathrm{ext}(\mathsf{Force}(\psi))$ であることと，$[p] \cap \mathsf{Force}(\psi) = \varnothing$ となる $p \in G$ が存在することは同値である．後者は，

$$\text{任意のフィルター } H \text{ に対して，} p \in H \text{ ならば } H \nVdash \psi \text{ である} \tag{5.2}$$

ということを意味する．この条件が $p \Vdash \neg\psi$ と同値であることを示そう．もし，式 (5.2) が成立しないならば，ある $p, r \in H$ について $r \Vdash \psi$ であり，H はフィルターであるから，$q < p, r$ となる $q \in H$ が存在する．観察 5.7 の単調性より，$q \Vdash \psi$ である．これは $p \nVdash \neg\psi$ を意味する．逆に，$p \nVdash \neg\psi$ ならば，$q \Vdash \psi$ となる $q < p$ が存在する．自己稠密性より，q を含むフィルター H が存在し，フィルターは上方閉であるから，$p \in H$ を得る．また，$q \Vdash \psi$ なので $H \Vdash \psi$ である．以上より，式 (5.2) は $p \Vdash \neg\psi$ と同値であるから，$G \in \mathrm{ext}(\mathsf{Force}(\psi))$ は，$p \Vdash \neg\psi$ となる $p \in G$ が存在することを意味する．すなわち，$G \Vdash \neg\psi$ である． □

[*19] 集合論的な文脈では，ここで導入した強制関係は内的強制関係 $\Vdash^*$ に相当するものである．現代的な集合論入門では，外的強制関係 $\Vdash$ を先に与えてから，内的強制関係 $\Vdash^*$ を導入して，$\Vdash$ と $\Vdash^*$ の同値性を示すことが多い．本稿ではコーエンの元々のアイデアと同様，内的強制関係から先に導入している．

このようにして強制関係は算術的真理の開集合近似を行うものであるが，ここで気になるものは，近似のために必要な開集合の複雑性である．たとえば，Σ_n 集合はどの程度の複雑性の開集合で近似されるだろうか．ポーランド空間の場合，Σ_n 集合は狭義 Σ_n 論理式で定義することができ，強制関係の複雑性も高くならない．しかし，準ポーランド空間の場合には，Σ_n 集合の記述には単なる量化子だけでなく命題結合子を組み込む必要がある．そして，強制関係の定義において，命題結合子 $\neg, \wedge, \rightarrow$ は量化子を伴うから，命題結合子を組み合わせるだけで複雑性が上がってしまうのである．

準ポーランド空間における論理式 $\exists n \in \theta.\varphi(n)$ や $\forall n \in \theta.\varphi(n)$ の背後には命題結合子が潜んでいる．この問題を解消するために，命題結合子に対する強制関係を経由せず，この形状の論理式に対する強制関係を定義してしまおう．つまり，強制関係を考える上では，$\exists n(\theta(n) \wedge \psi(n))$ と $\exists n \in \theta.\psi(n)$ は異なる論理式として取り扱う．そして，Σ_n 論理式を考える上で本質的に出現する論理式は後者の形のものである．この論理式に対する強制関係を以下のように定義する．

$$p \Vdash \exists n \in \theta.\psi(n) \iff p \Vdash \theta(n) \text{ and } p \Vdash \psi(n) \text{ for some } n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

このような重複した定義が問題を生じないことは後で確認する．ただし，略記形と非略記形の区別の必要があるため，定義 4.48 に従って略記形で書かれた Σ_n 論理式を準 Σ_n 論理式と呼ぶことにする．すべての略記形を展開した Σ_n 論理式については，真 Σ_n 論理式と呼ぶ．

以下の補題は，通常は狭義 Σ_n 論理式に対して示されるが，準 Σ_n 論理式においても成立する．ただし，ポーランド空間のみに興味がある場合には，狭義 Σ_n 論理式だけ考えればよい．

補題 5.9 (定義可能性補題)**.** φ が準 Σ_n 論理式ならば，$\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \varphi\}$ は Σ_n である．

Proof. 強制関係の定義に基づき，準論理式の複雑性に関する帰納法を行う．定義 4.48 を思い出すと，準論理式の階層の構成は本質的に 3 種類の方法によって与えられる．

(1) φ が Σ_1 の場合は，命題変数と存在量化しか出現しないので，明らかに $p \Vdash \varphi$ は Σ_1 である．

(2) φ が Π_k の場合は，Σ_k 論理式 ψ の否定形 $\neg\psi$ である．帰納的仮定より，$p \Vdash \psi$ は Σ_k である．したがって，$p \Vdash \neg\psi$ は，Π_k 論理式 $q \nVdash \psi$ に全称量化を行ったものであるから，$p \Vdash \varphi$ が Π_k であることが示された．

(3) φ が Σ_{k+1} の場合には，$\exists n \in \theta.\psi(n)$ の形である．ここで θ は Σ_k，ψ は Π_k である．帰納的仮定より，$p \Vdash \theta(n)$ は Σ_k，$p \Vdash \psi(n)$ は Π_k である．したがって，$p \Vdash \exists n \in \theta.\psi(n)$ は Σ_{k+1} である． □

以上より，$\mathsf{Force}(\varphi)$ は Σ_n 開集合である．ここで，$U \subseteq \widehat{\mathbb{P}}$ が Σ_n 開集合とは，ある Σ_n 集合 $S \subseteq \mathbb{P}$ が存在して，$U = \bigcup_{\sigma \in S}[\sigma]$ を満たすことを意味する．さて，例 5.5 の 1-ジェネリック性のアイデアをより一般的な形式に拡張しよう．

定義 5.10. 計算近似系 $\mathbb{P}$ に対して，フィルター $G \in \widehat{\mathbb{P}}$ が ***n*-ジェネリック** (*n-generic*) であるとは，任意の Σ_n-論理式に対して，$G \Vdash \varphi$ または $G \Vdash \neg\varphi$ が成立することである．

ただし，準ポーランド空間を考える際には，真論理式と準論理式を扱う必要がある．Σ_1 については真論理式と準論理式が一致するが，Σ_2 以降では，真論理式と準論理式を一旦区別する必要がある．したがって，上記の定義において真 Σ_n-論理式を考えている場合には，真 n-ジェネリックと呼び，準 Σ_n-論理式を考えてい

る場合には，準 n-ジェネリックと呼ぶことにする．

定義 4.36 を思い出すと，1-ジェネリックとは，枚挙可能開集合，すなわち Σ_1-開集合の境界に属さないことであった．それに対して，n-ジェネリックとは，ある特別な Σ_n-開集合の境界に属さないことに対応する．以下，∂U によって U の境界を意味していたことを思い出そう．

観察 5.11. フィルター $G \subset \mathbb{P}$ が準 n-ジェネリックであることと，任意の準 Σ_n 論理式 φ に対して，$G \notin \partial\mathsf{Force}(\varphi)$ であることは同値である．

Proof. なぜなら，$G \notin \partial\mathsf{Force}(\varphi)$ であるとは，$G \in \mathsf{Force}(\varphi)$ または $G \in \mathrm{ext}(\mathsf{Force}(\varphi))$ を満たすことであるから，補題 5.8 より，これは $G \Vdash \varphi$ または $G \Vdash \neg\varphi$ であることを意味する． □

もちろん，上記の観察は真 n-ジェネリックと真 Σ_n 論理式に対しても成立する．さて，強制関係の基本的なアイデアについて再考しよう．強制 $p \Vdash \varphi$ とは，論理式 φ が $[p]$ において局所的に典型的な性質であるということである．つまり，$p \Vdash \varphi$ とは，局所的な部分 $[p]$ においては大多数のものが φ を満たす．もちろん「特徴的な個体」は非典型的な性質を満たすから，強制関係には従わないであろうが，「無特性な個体」は典型的な性質しか満たさないため，強制関係が記述した通りの振る舞いをする．

この「無特性な個体」に相当するものが，ジェネリックの概念である．ジェネリックという単語には，典型的，無特徴，無印，といったニュアンスが含まれている．n-ジェネリックの場合，Σ_n-論理式では特徴を掴めない，つまり Σ_n-論理式で記述された性質の真偽は典型的なものと完全に一致する．言い換えれば，Σ_n-論理式に関する「強制 = 真理」が成立する．以下，$G \in [\![\varphi]\!]$ であることを $G \models \varphi$ と書く．

補題 5.12 (真理補題)**.** フィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ について，以下の条件は同値である．

(1) G は準 n-ジェネリックである．
(2) φ が準 Σ^0_n または準 Π_n ならば，$G \models \varphi$ であることと $G \Vdash \varphi$ であることは同値である．
(3) φ が準 Σ^0_{n+1} ならば，$G \models \varphi$ であることと $G \Vdash \varphi$ であることは同値である．

Proof. (3)⇒(2): 自明．(2)⇒(1): 排中律より $G \models \varphi$ または $G \models \neg\varphi$ のいずれかが成り立つので，仮定より，$G \Vdash \varphi$ または $G \Vdash \neg\varphi$ である．

(1)⇒(3): 論理式の複雑さ上の帰納法による．強制関係と真偽の定義の差異は，否定のみにあるから，$\varphi \equiv \neg\psi$ のときだけを考えればよい．ここで ψ は準 Σ_n であるとする．G が準 n-ジェネリックであることと帰納的仮定を用いれば，以下を得る．

$$G \Vdash \neg\psi \iff G \nVdash \psi \iff G \not\models \psi \iff G \models \neg\psi.$$

以上より，すべての同値性が示された． □

真理補題 5.12 によって，準 n-ジェネリック・フィルター上で Σ_{n+1}-集合 $A = [\![\varphi]\!]$ と Σ_{n+1}-開集合 $\mathsf{Force}(\varphi)$ が一致することを示すものである．Σ_{n+1}-集合 $[\![\varphi]\!]$ が Σ_{n+1}-開集合 $\mathsf{Force}(\varphi)$ によって近似されていると主張するためには，$[\![\varphi]\!]$ と $\mathsf{Force}(\varphi)$ の誤差が小さいことを述べなければならない．このためには，準 n-ジェネリック・フィルターでないものが（位相的に）希少であることを示せばよい．

このためには，観察 5.11 の特徴付けを利用すればよい．境界は位相的に小さい集合であるから，ベールのカテゴリー定理より，位相的に多数のものが n-ジェネリックであることが導かれる．つまり，n-ジェネリッ

ク・フィルターでないものは，（位相的に）希少であるより精密には，命題 4.37 と同様の方法によって，実効ベールのカテゴリー定理 4.31 を用いて，以下の主張を容易に示すことができる．

命題 5.13. 任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，$\varnothing^{(n+1)}$-計算可能な準 n-ジェネリック・フィルター $G \ni p$ が存在する．特に，準 n-ジェネリック・フィルターは稠密に存在する．□

以上より，ジェネリックという典型的なものは大多数であり，大多数のものの上で「強制 = 真理」が成立する．すなわち，Σ_n-集合 $[\![\varphi]\!]$ が Σ_n-開集合 $\mathsf{Force}(\varphi)$ によって近似されることが分かった．

ところで，表面上は，n-ジェネリック性の定義 5.10 は，1-ジェネリック性の定義 4.36 の直接的な一般化としては与えられていない．もちろん観察 5.11 の特徴付けはあるものの，そこでは特別な Σ_n-開集合の境界のみを考えている．しかし，実際は，n-ジェネリック性の定義 5.10 として，1-ジェネリック性の定義 4.36 の以下のような一般化として与えることが可能である．

命題 5.14. フィルター $G \subseteq \mathbb{P}$ に対して，以下の 2 条件は同値である．

(1) G は準 n-ジェネリックである．
(2) 任意の Σ_n 開集合 U に対して，$G \notin \partial U$ である．

Proof. (2)⇒(1): いま，φ が準 Σ_n 論理式ならば，定義可能性補題 5.9 より，$\mathsf{Force}(\varphi)$ は Σ_n 開集合である．よって，仮定より $G \notin \partial\mathsf{Force}(\varphi)$ であるが，観察 5.11 より，これは G が準 n-ジェネリックであることを意味する．

(1)⇒(2): 任意の Σ_n 開集合 U に対して，ある準 Σ_n 論理式 φ が存在して，$U = [\![\varphi]\!]$ と書ける．$U = \mathsf{Force}(\varphi)$ が成立することを示そう．さもなくば，双方とも開集合であるから，ある $p \in \mathbb{P}$ について，$[p] \subseteq U$ かつ $[p] \cap \mathsf{Force}(\varphi) = \varnothing$ であるか，または $[p] \cap U = \varnothing$ かつ $[p] \subseteq \mathsf{Force}(\varphi)$ が成立する．前者の場合，$p \Vdash \neg\varphi$ であることに注意する．いま，命題 5.13 より，$p \in G$ となる準 n-ジェネリック・フィルター G が存在する．前者の場合には，$G \in U = [\![\varphi]\!]$ かつ $G \Vdash \neg\varphi$ であり，後者の場合には，$G \notin U = [\![\varphi]\!]$ かつ $G \Vdash \varphi$ である．しかし，真理補題 5.12 より，これはあり得ない．□

系 5.15. 任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，$\varnothing^{(n+1)}$-計算可能な準 n-ジェネリック・フィルター $G \ni p$ が存在する．特に，準 n-ジェネリックは稠密に存在する．

ともあれ，真理の開集合近似，すなわち Σ^0_n 集合が Σ^0_n 開集合による近似が達成された．歴史的なことを述べておくと，定義可能性補題 5.10 や真理補題 5.12 の起源は，もちろん 1963 年のコーエンによる強制法である．集合論的な文脈でこれらの補題を説明すると，「無特性」な G については，強制拡大後 $M[G]$ の性質を M において内的に定義可能な関係 $\Vdash$ によって正しく記述できるということである．

同年に，フェファーマンは，強制法を算術に持ち込むアイデアを発表し，上述のように 1965 年に論文として発表された．フェファーマンは算術的階層に関する細かい分析は行わなかったが，それはすぐにヒンマン (Peter Hinman) によって成し遂げられた．ヒンマンの結果の概要は 1965 年には公表されたが，論文「算術の階層問題への強制法のいくつかの応用 (Some applications of forcing to hierarchy problems in arithmetic)」は 1969 年まで出版されなかったようである．フェファーマンは算術的論理式だけでなく超算術的論理式も取り

扱っており，この研究はすぐにトマソン (Steven Thomason) が継承した．トマソンもまた 1965 年に超算術的強制法に関するいくつかの結果の概要を公表し，1966 年に博士論文「強制法と超次数の上半束 (The Forcing Method and the Upper Semi-Lattice of Hyperdegrees)」として出版された．

5.3. ジャンプ逆化定理

1954 年のクリーネとポストの論文において，チューリング次数に関する数多くの問題が提示されていたが，そのうちの一つが，$\mathbf{x}'$ の形のチューリング次数の分布の問題であった．この時点では，クリーネ-ポストが述べるように，この問題はほとんど手つかずであり，$\mathbf{x}'$ の分布は全く何も分かっていなかった．しかし，1957 年，リチャード・フリードバーグ (Richard Friedberg) は，すぐに $\mathbf{x}'$ の形のチューリング次数の分布を確定し，クリーネ-ポストの問題に解決を与えた．この定理は，現在，フリードバーグの逆化定理として知られるもので，$\mathbf{0}'$ 以上の任意のチューリング次数はすべて $\mathbf{x}'$ の形として書けることを示したものである．クリーネ-ポストの定理が「ジェネリック実数」を用いたものであるのに対し，フリードバーグの定理は「ジェネリック埋め込み」によるものであると考えることができる．

部分関数 $f\colon\subseteq\mathbb{N}\to 2$ の全域拡張 $g\colon\mathbb{N}\to 2$ について考えよう．拡張とは，k 番目の未定義入力 u_k の値を $f(u_k)=x_k$ とする，という手続きであると考えられるから，つまり，$x=\langle x_0,x_1,x_2,\dots\rangle\in 2^{\mathbb{N}}$ を指定すれば，f の全域拡張 $\hat{f}(x)$ が一意に定まる．より形式的には，$E\subseteq\mathbb{N}$ を f の定義域の補集合とし，u_k を E の k 番目の元とする．このとき，$\hat{f}\colon 2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}$ を以下によって定義する．

$$\hat{f}(x)(n)=\begin{cases} f(n) & \text{if } n\notin E\\ x(k) & \text{if } n=u_k\end{cases}$$

いま，部分関数 $f\colon\subseteq\mathbb{N}\to 2$ の代わりに全域関数 $f\colon\mathbb{N}\to 3$ を考え，$f(n)=2$ によって $f(n)$ が未定義であることを表すと考えよう．

観察 5.16. $f\mapsto\hat{f}\colon 3^{\mathbb{N}}\to[2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}]$ は計算可能である．さらに，もし無限個の n に対して $f(n)=2$ ならば，$\hat{f}\colon 2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}$ は f-計算可能な左逆を持つ．

Proof. $\hat{f}(x)(n)$ を計算するアルゴリズムは，f を n 桁目まで読み込み，$f(k)=2$ の部分に順に x の値を代入していけばよい．部分左逆の計算可能性については，$f(n_k)=2$ となる k 番目の元 n_k について，$\hat{f}(x)(n_k)=x(k)$ が成立している．つまり，$g(y)=\lambda k.y(n_k)$ と定義すれば，$g\colon 2^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathbb{N}}$ は f-計算可能であり，$g(\hat{f}(x))=x$ であるから，g は f の左逆である． □

補題 5.17. $g\in 3^{\mathbb{N}}$ が弱 α-ジェネリックならば，任意の $x\in 2^{\mathbb{N}}$ に対して，$\hat{g}(x)$ は弱 α-ジェネリックである．

Proof. 開集合 $U\subseteq 2^{\mathbb{N}}$ に対して，以下の集合を考える．

$$\tilde{U}=\{f\in 3^{\mathbb{N}}:\forall x\in 2^{\mathbb{N}}.\ \hat{f}(x)\in U\}$$

この $\tilde{U}$ の定義式は $2^{\mathbb{N}}\subseteq\hat{f}^{-1}[U]$ と同値であることに注意しておこう．

主張. $\tilde{U}$ は開集合であり，$U\mapsto\tilde{U}\colon \mathit{Open}\,2^{\mathbb{N}}\to\mathit{Open}\,3^{\mathbb{N}}$ は計算可能である．

Proof. まず，$f \mapsto \hat{f}\colon 3^{\mathbb{N}} \to [2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}]$ は計算可能である．また，一般的に $(h, V)\colon [X \to Y] \times \mathit{Open}\, Y \to \mathit{Open}\, X$ は計算可能である．さらに，C がコンパクトならば，$V \mapsto \{C \subseteq V\}\colon \mathit{Open}\, C \to \mathbb{S}$ は計算可能である．ここで，$\{C \subseteq V\}$ は $C \subseteq V$ の真理値を表す．以上のプロセスをつなげると，

$$3^{\mathbb{N}} \times \mathit{Open}\, 2^{\mathbb{N}} \ni (f, U) \mapsto (\hat{f}, U) \mapsto \hat{f}^{-1}[U] \mapsto \{2^{\mathbb{N}} \subseteq \hat{f}^{-1}[U]\} \in \mathbb{S}$$

は計算可能である．これをカリー化すると，$U \mapsto (f \mapsto \{2^{\mathbb{N}} \subseteq \hat{f}^{-1}[U]\})\colon \mathit{Open}\, 2^{\mathbb{N}} \to (3^{\mathbb{N}} \to \mathbb{S})$ の計算可能性を得る．ここで，$f \mapsto \{2^{\mathbb{N}} \subseteq \hat{f}^{-1}[U]\}$ は $\tilde{U}$ の特性関数に他ならないので，$U \mapsto \tilde{U}$ の計算可能性が導かれた． $\square$

主張． もし $U \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ が稠密ならば，$\tilde{U} \subseteq 3^{\mathbb{N}}$ もまた稠密である．

Proof. 有限列 $p \in 3^{<\mathbb{N}}$ が与えられているとする．$p(k) = 2$ となる k がちょうど n 個であると仮定する．このとき，各 $\sigma \in 2^n$ に対して，$\hat{p}(\sigma) \in 2^{<\mathbb{N}}$ が定義される．長さ n の k 番目の有限列を σ_k と書く．$q_0 = p$ とし，各 $k \leqslant 2^n$ に対して q_k を定義する．いま，$k < 2^n$ について，q_k が定義されているとする．U は稠密なので，$[\hat{q}_k(\sigma_k)] \cap U \neq \varnothing$ であるから，ある $\tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ が存在して，$[\hat{q}_k(\sigma_k)^\frown \tau] \subseteq U$ である．このとき，$q_{k+1} = q_k{}^\frown \tau$ と定義する．最後に，$q = q_{2^n}$ とする．いま，$f \in 3^{\mathbb{N}}$ を q の任意の拡張とする．各 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して，$\sigma_k \subseteq x$ となる k を取ると，$\hat{f}(x) \in [\hat{q}(\sigma_k)] \subseteq [\hat{q}_{k+1}(\sigma_k)]$ が成立する．構成より，$\hat{f}(x) \in [\hat{q}_{k+1}(\sigma_k)] \subseteq U$ である．よって，$f \in \tilde{U}$ であり，f は p の拡張であるから，$\tilde{U}$ が稠密であることが示された． $\square$

いま，$g \in 3^{\mathbb{N}}$ が弱 α-ジェネリックであると仮定しよう．$U \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ が α-計算可能な稠密開集合であるとすると，最初の主張より，$\tilde{U} \in 3^{\mathbb{N}}$ もまた α-計算可能であり，次の主張より，稠密である．したがって，$g \in \tilde{U}$ を得る．定義より，任意の $x \in 2^{\mathbb{N}}$ に対して，$\hat{g}(x) \in U$ であるから，これは $\hat{g}(x)$ が弱 α-ジェネリックであることを意味する． $\square$

ジェネリック埋め込み $\hat{g}\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ がジャンプ逆化を行うことを示そう．

定理 5.18 (フリードバーグのジャンプ逆化定理)**.** 任意の $x \geqslant_T \varnothing'$ に対して，ある y が存在して，$y' \equiv_T x$ が成立する．

Proof. 実効ベールのカテゴリー定理 4.31 より，$\varnothing'$-計算可能な弱 $\varnothing'$-ジェネリック $g \in 3^{\mathbb{N}}$ が存在する．このとき，明らかに無限個の n について，$g(n) = 2$ である．観察 5.16 より $\hat{g}$ は g-計算可能な左逆を持つので，$\hat{g}(x)$ から x の復元は g-計算可能である．つまり，$x \leqslant_T \hat{g}(x) \oplus g$ が成立する．したがって，

$$x \leqslant_T \hat{g}(x) \oplus g \leqslant_T \hat{g}(x) \oplus \varnothing' \leqslant_T (\hat{g}(x))'$$

を得る．また，$\hat{g}$ の g-計算可能性より，$\hat{g}(x) \leqslant_T g \oplus x$ であり，補題 5.17 より $\hat{g}(x)$ は弱 $\varnothing'$-ジェネリック，特に 1-ジェネリックなので，補題??より，チューリングジャンプは $\hat{g}(x)$ 上 $\varnothing'$-計算可能連続である．つまり，$(\hat{g}(x))' \leqslant_T \hat{g}(x) \oplus \varnothing'$ を得る．したがって，

$$(\hat{g}(x))' \leqslant_T \hat{g}(x) \oplus \varnothing' \leqslant_T g \oplus x \oplus \varnothing' \leqslant_T x$$

が成立する．以上より，$(\hat{g}(x))' \equiv_T x$ が得られた． $\square$

§ 6. ランダム性

6.1. コレクティーフ

今，手元にコインがあるが，少し歪んでいて，コイン投げをしたときの表と裏の出る確率が不均等であるとしよう．我々は，このコイン投げを行った際に表が出る確率 p を知りたいとする．このために我々は，とりあえずコインを何度も投げてみることだろう．十分に試行回数を重ねれば，コイン投げの表が出た**頻度**は徐々に p に近づいていくと期待できる．たとえば，コイン投げを 10,000 回行って，表が出た回数 5,500 回だったならば，我々は「このコインを投げたときに表が出る確率はおよそ 55% であろう」と結論付けるのである．このように実践的には，与えられた事象に対して，多数の試行の中でその事象が発生する**頻度**として，事象の発生確率 p を近似するのである．

20 世紀初頭，まだ確率論の数学的基礎は完全に確立しているとは言い難かった[*20]．1919 年，フォン・ミーゼス (Richard von Mises) は「確率計算の基礎 (Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung)」において，頻度論に基づく確率の基礎付けを試みた．フォン・ミーゼスのアイデアはこうである．上述のように，事象 S の発生確率 p は，無作為に抽出されたサンプルの列 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ について，

$$\text{事象 } S \text{ が発生する頻度} = \frac{\#\{k < n : \alpha_k \in S\}}{n}$$

の極限として得ることができるであろう．したがって，「無作為抽出」つまり「ランダムな試行」の概念さえ数学的に定式化できれば，確率論の数学的基礎付けを与えられる．フォン・ミーゼスは，このような無作為に収集されたサンプルの列を**コレクティーフ** (*Kollectiv*)[*21] と呼び，こう宣言した．

まずコレクティーフ，次に確率だ．

つまり，無作為性，ランダム性の概念を定式化することが，確率論の基礎付けのための最初のタスクである．

議論 (無作為性/ランダム性の定式化，フォン・ミーゼス 1919)**.** 簡単のために，各試行の結果が，有限集合 A に属す値として得られる過程について考えよう．まず，ランダムな試行の系列 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ において，大数の法則より，各 $a \in \mathsf{A}$ の出現頻度は収束するであろう．これをコレクティーフの公準 I とする．

次に，定期的に何らかの情報をランダムに生成する現象 X があるとする．現象 X は，我々がその存在を発見する前から，自動的に $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ という列を生成していた．現象 X が α_0 を生成していた頃はまだ我々は現象 X を知らず，その発見後も，我々は常に現象 X を監視しているわけではない．したがって，我々の観測結果は $\alpha_{t(0)}, \alpha_{t(1)}, \alpha_{t(2)}, \dots$ という飛び飛びのデータになるであろう．しかし，もし X が真にランダムに情報を生成しているのであれば，どのタイミングで現象を観測したとしても，観測した瞬間のデータを常に記録することにすれば，観測結果 $\alpha_{t(0)}, \alpha_{t(1)}, \alpha_{t(2)}, \dots$ はランダムな列になっているに違いない．

[*20] ボレルやルベーグによる測度論は誕生しており，1914 年のハウスドルフの教科書「集合論基礎」などには測度を確率として解釈する記述はあった．しかし，1910 年代初頭までの測度論はまだ殆ど実数上の可測集合の理論であり，確率論的に言えば，まだ区間上の一様分布しか測度論的な取り扱いはできていなかった．1910 年代中頃から，積分論の文脈で徐々に一般的な測度が取り扱われるようになっていくが，1910 年代末時点では，現在に近い形での抽象的な測度について考察し始めていたのは，ほんのわずかな研究者のみだったと思われる．

[*21] この用語自体は，1897 年に出版されたフェヒナー (Gustav Fechner) の著書 “Kollektivmasslehre” において類似の概念に対して用いられたものであり，フォン・ミーゼスはこの用語を借用したようだ．ただし，フェヒナーは，ある種の不特定多数のサンプルの集合体を意味する用語としてこれを用いたのであり，その数学的定式化を与えようとは試みていないと思われる．

したがって，コレクティーフの公準 II は次のようなものである．次の試行結果を採用するか否かが試行の直前には既に定まっているような選出規則 t に対して，部分列 $\alpha_{t(0)}, \alpha_{t(1)}, \alpha_{t(2)}, \ldots$ もまた公準 I を満たす．

フォン・ミーゼスのアイデアは興味深いものであったが，欠点も多く，様々な批判を浴びた．代表的なものは，選出規則の概念が厳密に定義されていない，連続確率分布には通用しないのではないか，などである．

フォン・ミーゼスのアイデアを救い出すため，何人かの研究者によって，選出規則の概念を厳密に定式化する試みがなされた．1928 年のコープランド (Arthur Copeland) は，「確率論における許容可能数 (Admissible Numbers in the Theory of Probability)」において，特別な有限的選出規則のみを取り扱うことを提案した．彼が提示した定義は若干複雑なので，上記論文の Theorem 9 で与えられた同値な定義の方を紹介しよう．

定義 6.1 (コープランド 1928)**.** 列 $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ の周期的選出とは，ある自然数の有限列 $r(0) < r(1) < \cdots < r(k) < s$ に対して，α の第 $sn + r(i)$ 項だけを選出して得られた部分列である．

$$\alpha_{r(0)}\alpha_{r(1)} \cdots \alpha_{r(k)}\alpha_{s+r(0)}\alpha_{s+r(1)} \cdots \alpha_{s+r(k)} \cdots \alpha_{sn+r(0)}\alpha_{sn+r(1)} \cdots \alpha_{sn+r(k)} \cdots$$

列 α がコープランドの意味でコレクティーフであるとは，任意の周期的選出の下で極限頻度が存在し一定であることを意味する．

1934 年のポパー (Karl Popper) の有名な著書「科学的発見の論理 (Logik der Forschung)」においても，コレクティーフ概念の定式化が取り扱われた．基本的な発想は，コープランドと同様の有限的選出規則である．

定義 6.2 (ポパー 1934)**.** 有限列 $\sigma \in \mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ を固定したとき，列 $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ の σ による選出とは，α のうち σ の出現の直後の項だけ選出することによって得られた部分列である．列 α がポパーの意味でコレクティーフであるとは，任意の有限列による選出の下で極限頻度が存在し一定であることを意味する．

観察 6.3. コープランドの意味でコレクティーフであることとポパーの意味でコレクティーフであることは同値である．

しかし，フォン・ミーゼスにとっては，これらのコレクティーフの定式化は納得が行くものではなかったようだ．彼らの意味での選出規則は，あまりにも制限されすぎていた．より満足の行く定式化は，ウォールド (Abraham Wald) によって与えられた．

定義 6.4 (ウォールド 1936)**.** 選出規則とは，関数 $\varphi\colon \mathsf{A}^{<\mathbb{N}} \to 2$ である．列 $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2 \ldots$ の φ による選出とは，任意の n について，$\varphi(\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n) = 1$ のとき項 α_{n+1} を選出することによって得られた部分列である．選出規則の集合 Φ に対して，列 α が Φ-コレクティーフであるとは，任意の $\varphi \in \Phi$ による選出の下で極限頻度が存在し一定であることを意味する．

1936 年頃にウォールドは，選出規則の任意の可算集合 Φ に対して，無数の Φ-コレクティーフの存在が保証されることを指摘している．1937 年のウォールドは「確率計算のコレクティーフ概念の無矛盾性 (Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes der Wahrscheinlichkeitsrechnung)」において，この主張の証明を与えると共に，可算個の選出規則に制限することの正当化を行っている．前者は当時でも比較的自明であったようであるから，後者の方が重要かもしれない．ウォールドは論理学的な観点を取り入れ，記述が曖昧ではあるものの，構成的な選出規則について議論している．構成的手順は可算種類しか有り得ないから，可算個の選出

規則を考えれば十分なはずだ．

ウォールドのアイデアを厳密に定式化したのが，1940 年のチャーチによる「ランダム列の概念について (On the concept of a random sequence)」である．もう 1936 年を越えており，計算可能性の定義は既に誕生していた．その誕生の当事者であるチャーチにとっては，ウォールドの言わんとすることは明らかであったことだろう．

定義 6.5 (チャーチ 1940)**.** 列 α がチャーチの意味でコレクティーフであるとは，列 α がすべての計算可能選出規則に対してコレクティーフであることを意味する．つまり，任意の計算可能関数による選出の下で極限頻度が存在し一定である．

この概念は，**チャーチ確率的** (*Church stochastic*) と呼ばれることもある．ともあれ，ウォールドやチャーチの研究によって，コレクティーフの概念に厳密な定式化が与えることが可能であることが示された．これによってコレクティーフに基づく数学的確率論の展開の可能性の芽が見えた．とはいえ，選出規則の族を定め，それに対するコレクティーフを生成し，そこから極限頻度としてようやく確率が導入される，というフォン・ミーゼスの確率論は手間が非常に大きく，また，連続確率分布を扱う際は更に厄介であった．

1933 年にはコルモゴロフによる「確率論の基礎概念 (Foundations of the theory of probability)」が既に出版されており，確率論の基礎としてコルモゴロフの公理的確率論が既に人々に浸透しつつあった．ほとんどの数学者は，コレクティーフに基づく煩雑な確率論よりも，コルモゴロフの手軽な公理的確率論を選んだ．

フォン・ミーゼスの理論は，数学的確率論の基礎としては煩雑であったが，とはいえ，コレクティーフ（無作為性あるいはランダム性）という概念の定式化を試みたという点では重要である．すなわち，具体的な試行の列が「ランダムに生成されたもの」であるか否かを見分ける定性的な指標を与えたのだ．したがって，フォン・ミーゼスの理論は「ランダム性の数学的理論」とでも呼ぶべきものを最初に生み出したという点で，歴史的な価値を持っている．

とはいえ，あくまでコレクティーフは，ランダム性の概念の最初の定義案にしか過ぎない．1936 年には，ヴィル (Jean Ville) は，コレクティーフの定義はランダム性の定式化としても欠如があると指摘し，1939 年には「コレクティーフ概念の批判的研究 (Etude critique de la notion de collectif)」を出版した．

議論 (ヴィルの指摘 1936)**.** フォン・ミーゼスは，極限頻度，すなわち大数の法則というたった一つの確率法則だけに執心しすぎていた．しかし，ランダムな現象が満たすべき確率法則は他にも無数にある．一例として，コレクティーフの定義は，頻度の収束の仕方に関する法則を完全に見過ごしている．たとえ 2 進列 $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots$ における 0 と 1 の出現頻度が共に 1/2 に収束するとしても，収束の仕方が不自然になる可能性を除去できない．たとえば，極限的には 1 の出現頻度が 1/2 になるが，有限部分では常に 1 の出現率の方が多い列を構成することは容易である．しかし，そのような列の生成には何らかの作為が関わっており，ランダムに生成されたものでないと確信できる．1936 年のヴィルは，（ウォールドの意味での）コレクティーフの条件を満たしつつ，このような出現率に偏りを持つ列を構成できることを示したのである．特に，コレクティーフの定義からは，たとえば重複対数の法則 (law of the iterated logarithm) を満たすことは保証されない．

ヴィルの指摘は，その時点で公表されていたウォールドの定義に対するものであるが，1940 年のチャーチの定義にも適用可能である．したがって，ここまでに出現したコレクティーフの定義は，ランダム性の定義としても欠陥があるものであったと指摘されたことになる．このためかチャーチの論文の後継的研究はしばらく

の間，現れなかったように見える[*22].

とはいえ，コレクティーフの数学的研究は完全に放棄されたかといえばそうではない．たとえば，ランダム性概念への関心を捨てていなかったコルモゴロフが幾度かコレクティーフ概念について再考している．1963年のコルモゴロフの「乱数表について (On tables of random numbers)」では，列を順次読み込んでいくのではなく，自由な順序で項を読み込んでいくタイプの選出規則を提示している．この論文におけるコルモゴロフの主要な関心は有限列の（頻度論的）ランダム性であったことには注意しなければならない．ただし，議論を無限列に拡張したときには，チャーチの概念の一般化が得られることは，コルモゴロフ本人によって言及されている．

1966年のラブランド (Donald Loveland) もまた「フォン・ミーゼスのランダム列の概念の新解釈 (A New Interpretation of the von Mises' Concept of Random Sequence)」において，同様の選出概念を提示している．こうしてコルモゴロフ-ラブランド確率的 (Kolmogorov-Loveland stochastic) と呼ばれる概念が生み出された．

コープランド-ポパーの意味でのコレクティーフに再注目した研究としては，1961年の Postnikova による「ミーゼス-チャーチのコレクティーフと記号の正規ベルヌーイ数の概念の間の結び付き (On the connection between the concepts of collectives of Mises-Church and normal Bernoulli sequences of symbols)」がある．ここでは，コープランド-ポパーの意味でのコレクティーフと正規数の概念との結び付きが指摘される．この研究とチャーチの研究を組み合わせたものが，1968年の Agafonov による「正規数と有限オートマトン (Normal sequences and finite automata)」である．チャーチが計算可能関数による選出を考えたのと同様に，Agafonov は有限オートマトンによる選出を考えた．

定義 6.6. 列 α が Agafonov の意味でコレクティーフであるとは，列 α がすべての有限オートマトンによる選出規則に対してコレクティーフであることを意味する．

1968年の Agafonov の主定理は，この意味でコレクティーフであることと正規数であることが同値であるというものであった．これはオートマトンを用いたランダム性研究の最初期のものとして興味深いものである．

その他の興味深いコレクティーフ研究の例としては，1987年の van Lambalgen による「フォン・ミーゼスのランダム列の定義の再考 (Von Mises' Definition of Random Sequences Reconsidered)」などがある．この論文において，van Lambalgen は，選出規則には構成的なものだけでなく，たとえば確率的な選出規則もあり得ると主張した．たとえば，第 n 回目のコイン投げで表が出れば，第 n 項 α_n を選出するという選出規則である．つまり，（コレクティーフ本体とは独立であるような）ランダムな選出規則も認めよう．これは，構成的でも計算可能でもない選出規則であるから，チャーチの枠組みは，このようなコレクティーフの取り扱いには不適切である．この指摘もまたランダム性の理論に新たな発展を生み出すことになるが，コレクティーフに関しては一旦ここまでにしておこう．

6.2. マルチンゲール

上述の通り，1936年，コレクティーフ概念はランダム性の定義として欠陥があることが，ヴィルによって指摘された．ただし，重要な点は，ヴィルはただコレクティーフを批判しただけではなく，より適切な代替理論を提示したという部分である．この鍵となるアイデアが，賭博戦略の概念である．遅くとも1930年代中頃には，フォン・ミーゼスはコレクティーフの公準 II に対して，「賭博戦略の排除原理 (Prinzip vom ausgeschlossenen

[*22] 1940年代から1950年代における計算論的なコレクティーフ研究の形跡としては，筆者の知る限りでは，1951年の記号論理学会においてマイヒルがチャーチの論文と全く同名の題目での講演を行っているのみである．

Spielsystem)」という形の説明を与えていたようである[*23]．ただし，フォン・ミーゼスの賭博戦略は，賭け金の概念が無いなど，あまりにも単純化をしすぎていた．ヴィルはこの賭博戦略に賭け金等の概念を組み込むことで，コレクティーフの欠陥を修復できることに気づいた．

■コイン投げの賭博戦略: 博徒 M 氏はコイン投げ賭博を行っているとしよう．賭博のルールは以下である．

(1) 博徒 M 氏はコインの表が出るか裏が出るかに y 円を賭ける．
(2) M 氏の予想が正しかったならば，M 氏は y 円を受け取り，さもなくば M 氏は y 円を失う．

博徒 M 氏は，可能な限り儲けを増やすために，賭博戦略を立てることにした．賭博戦略は，現在までのコイン投げの結果の履歴が $\sigma = a_0a_1a_2\dots$ であるとき，次はどちらにいくら賭けるかを記載した指示書である．ただし，資産以上の額は賭けられないので，指示は「現在資産の何 % を賭ける」という形で与えられているとしよう．このような賭博戦略は，コイン投げの履歴 σ に対して $\mathsf{bet}(\sigma) \in [-1, 1]$ を割り当てる関数として表される．

(1) $\mathsf{bet}(\sigma) > 0$ ならば，次のコイン投げの結果が表であることに，現在資金の $|\mathsf{bet}(\sigma)|$ 倍を賭ける．
(2) $\mathsf{bet}(\sigma) < 0$ ならば，次のコイン投げの結果が裏であることに，現在資金の $|\mathsf{bet}(\sigma)|$ 倍を賭ける．
(3) $\mathsf{bet}(\sigma) = 0$ ならば，次のコイン投げ賭博には参加しない．

この賭博戦略に従ったとき，博徒 M 氏の資金がどうなっているかを計算してみよう．上記の条件は，以下のように書き換えることもできる．

(1) コイン投げの結果が表ならば，現在資金の $\mathsf{bet}(\sigma)$ 倍が資金に加算される．
(2) コイン投げの結果が裏ならば，現在資金の $-\mathsf{bet}(\sigma)$ 倍が資金に加算される．

以下では，コイン投げの結果が表であることを 0 とし，裏であることを 1 によって表そう．コイン投げ履歴 σ の時点での M 氏の資金を $\mathsf{capital}(\sigma)$ と書くと，資金を求める漸化式は以下によって与えられる．

$$\mathsf{capital}(\sigma 0) = (1 + \mathsf{bet}(\sigma)) \cdot \mathsf{capital}(\sigma) \qquad \mathsf{capital}(\sigma 1) = (1 - \mathsf{bet}(\sigma)) \cdot \mathsf{capital}(\sigma) \tag{6.1}$$

この 2 つの式を足し合わせると，M 氏の資金は以下の等式を満たすことが分かる．

$$\mathsf{capital}(\sigma 0) + \mathsf{capital}(\sigma 1) = 2 \cdot \mathsf{capital}(\sigma) \tag{6.2}$$

賭博戦略は，賭け額の指示として導入したが，実際には，式 (6.2) を満たす資金の指示として賭博戦略を導入することもできる．たとえば，コイン投げの履歴 σ 時点での資金が $10,000$ 円であったとして，「表が出たときの資金を $12,000$ 円，裏が出たときの資金を $8,000$ 円とするようにせよ」という指示書から，「表が出ることに $1,000$ 円賭ける」という賭博戦略を容易に逆算できる．一般的には，式 (6.1) を用いて，capital の情報から bet の情報を復元できることは明らかである．

以上が賭博のルールである．この設定の上で，ヴィルはこう考えた．もし 2 進列の生成法が完全にランダムなものであるならば，我々は履歴 $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n$ を見たところで，次の値 α_{n+1} を予測できるはずがない．したがって，どんな賭博戦略を用いても，決して儲けられないはずである．逆に，2 進列の生成法に何らかの作為あるいは規則性があるならば，次の値 α_{n+1} を高確率で予測する方法を見つけられるかもしれない．その場合には，適切な賭博戦略を構築して，いくらでも儲けることができるはずだ．

[*23] たとえば，1987 年の van Lambalgen の博士論文 “Random sequences” を見よ．和書であれば，ティモシー・チルダーズ著「確率と哲学」において，賭博戦略を用いたコレクティーフの公準 II の説明が与えられている．

定義 6.7 (ヴィル 1936)**.** 賭博戦略とは，関数 $\beta\colon 2^{<\mathbb{N}} \to [-1,1]$ であり，これに基づく資金過程を $\mathsf{capital}_\beta$ と書くことにする．賭博戦略 β が 2 進列 $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\dots$ 上の賭けに勝つとは，資金 $\mathsf{capital}_\beta(\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n)$ が上に非有界であることを指す．

$$\sup\{\mathsf{capital}_\beta(\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n) : n \in \mathbb{N}\} = \infty$$

賭博戦略の族 Φ に対して，2 進列 α がヴィルの意味で Φ-ランダムであるとは，どんな戦略 $\beta \in \Phi$ も α 上の賭けに勝てないことを意味する．

ヴィルは当初は賭博戦略を主軸に理論展開しようとしていたようであるが，上で述べたように資金過程の情報から賭博戦略を復元できるため，資金過程さえあれば賭博戦略は不要であることに気づいた．一方で，ランダム性の定義のために資金過程の情報は必要である．このため，ヴィルは，資金過程のデータを主軸とする方針へと理論を補正し，資金過程にマルチンゲールの名を与えた．これは遅くとも 1939 年のヴィルの「コレクティーフ概念の批判的研究」において成し遂げられている．

定義 6.8 (ヴィル 1939)**.** 関数 $d\colon 2^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が**マルチンゲール** (*martingale*) であるとは，等式 (6.1) を満たすこと，すなわち以下の式を成立させることである．

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

直感的には，マルチンゲールとは，何らかの賭博戦略に基づく資金過程のことである．この用語を用いて，定義 6.7 を言い換えるならば，

- マルチンゲール d が 2 進列上の賭けに勝つとは，$d(\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n)$ が上に非有界であることを指す．
- マルチンゲールの族 Φ に対して，2 進列 α がヴィルの意味で Φ-ランダムであるとは，どんな $d \in \Phi$ も α 上の賭けに勝てないことを意味する．

この再定義を見ると分かるように，ランダム性の定義に賭博戦略は不要であり，必要なものはマルチンゲール（資金過程）である．

雑談 (用語の由来)**.** マルチンゲールとは，18 世紀フランスにおいては，ある特定の賭博戦略[*24]の名称であった．ヴィルはこの用語を借用して，特定の賭博戦略のみならず一般の賭博戦略を指す用語としてマルチンゲールを採用したのである．その後，上述のように，ヴィルはすぐに，マルチンゲールという用語が指し示すものを，賭博戦略ではなく資金過程へと移し替えた．

ヴィルのマルチンゲールと類似した概念は，確率論において 1934 年にレヴィ (Paul Lévy) もまた考察していたが，彼はマルチンゲールという用語は用いていなかった．ドゥーブ (Joseph Doob) はヴィルの用語を採用し，その後，確率論におけるマルチンゲールの理論を発展させていくこととなる．

[*24] コイン投げ賭博の場合には，マルチンゲール法とは，負ける度に賭け金を倍額にしていく戦略であったと伝えられている．18 世紀のプレヴォ (Abbé Prévost) による辞典には既にマルチンゲールという項目があるらしく，そこではファノと呼ばれるトランプゲームにおける賭博戦略として説明されているようだ．R. Mansuy, *The origins of the word “martingale”* を参照．マルチンゲールは，ある種の馬具を指す用語としても用いられており，賭博としての競馬の歴史は長いことから，この馬具と賭博戦略の語源を結びつける文献もあるが，その正しさに関しては不明瞭である．

このようにして，ヴィルはマルチンゲールに基づくランダム性を導入したが，ヴィルの論文の価値を認めたものはほとんどいなかったようだ[*25]．マルチンゲール条件と類似の概念を用いていたレヴィは，ヴィルを過小評価しており，ヴィルの研究に関心を払わなかった[*26]．後に，レヴィからフレシェへの手紙の中で，彼はヴィルのマルチンゲールを用いたコレクティーフの定義を一度も理解したことがないと述べている．

ヴィルの理解者はほとんどおらず，ヴィル自身もその後マルチンゲールの研究にはほとんど戻らなかったため，フォン・ミーゼスのコレクティーフとは異なり，賭博戦略やマルチンゲールの族に関する議論は何も起こらなかった．もし 1940 年のチャーチがヴィルの理論に注目していたならば，計算可能マルチンゲールについて考察し，それに対するランダム性の概念を定義していたことだろう．現実には，マルチンゲールに対するランダム性というヴィルのアイデアは，30 年の眠りにつき，それが成し遂げられるのは 1970 年代のこととなる．おそらくチャーチはヴィルのマルチンゲールをそもそも知らなかったか，知っていたとしても，他の研究者と同様に，その重要性を認識できていなかったことだろう．

ともあれ，ヴィルのマルチンゲールは次第に忘れ去られ，ドゥーブのマルチンゲールのみが確率論の中で生き残った．ドゥーブはヴィルの功績を正確に理解していた数少ない研究者であったが，ヴィルのランダム性の概念は拾い上げなかった．その結果，ドゥーブの理論にはなくヴィルの理論にのみ存在していた「マルチンゲールに対するランダム性」というアイデアは確率論においては完全に消えて無くなった．

§ 7. マルチンゲールと測度

さて，ヴィルのマルチンゲールに対するランダム性概念がコレクティーフ概念と比べてどのように優れているかについて議論していこう．先程はコイン投げについて議論したが，実際にヴィルが考えていたものはもう少しだけ一般的な設定である．もちろん，ヴィルの目的はコレクティーフの理論の改良であったから，確率 1/2 のコイン投げだけでなく，一般の確率的現象を取り扱わなければならない．ここでは，マルチンゲールの用語の由来と関連する賭博競馬を用いた解説を与えよう．

■競馬の賭博戦略: いま，有限集合 A の各元に確率が割り当てられている．たとえば，競馬の場合には，馬 $x \in \mathsf{A}$ の勝率 $\mu(x)$ が定まっているというような状況である．

賭博場の胴元が各馬の勝率を完全に把握しており，博徒 M へ公平な賭博を持ちかけているとしよう．競馬のルールは複雑なので，ここでは一着の馬を当てるだけという形に単純化しよう．公平な賭博において，博徒 M が勝率 1/3 の馬 x に y 円賭けたとき，もし馬 x が一着でゴールすれば博徒 M は賭け額の 3 倍である $3y$ 円を受け取るべきであり，馬 x が負けたならば賭け額の y 円は没収されるべきである．以上をまとめると，賭博は以下のルールによって行われている．

(1) 馬 $x \in \mathsf{A}$ の勝率が $\mu(x)$ のとき，配当倍率は $1/\mu(x)$ である．
(2) 博徒 M は馬 x の勝利に $y(x)$ 円賭けたとする．この $y(x)$ 円は一旦，胴元の手に渡る．
(3) もし馬 x が一着を取れば，博徒 M の手に $y(x)/\mu(x)$ 円が戻ってくる．馬 x が一着を取れなかった場合には，お金は全く帰ってこない．

より一般的に，博徒 M は複数の馬に同時に賭けてよいとする．また，一着を取った馬の履歴 $\sigma = \alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_n$ に応じて，賭け額 $y_\sigma(x)$ を変えてもよい．さらに一般的な設定を考えるのであれば，賭博場の胴元が履歴 σ に

[*25] L. Bienvenu, et al., *On the history of martingales in the study of randomness*, J. Électron. Hist. Probab. Stat. 5 (2009) を参照．
[*26] L. Mazliak, *How Paul Lévy saw Jean Ville and martingales*, J. Électron. Hist. Probab. Stat. 5 (2009) を参照．

応じて，出走馬のリスト A_σ を変える可能性さえも扱うことができる．その場合には，履歴 σ 毎に $x \in \mathsf{A}_\sigma$ の勝率 $\mu_\sigma(x)$ が定まるはずである．リストは $\mathsf{A}_\sigma = \mathsf{A}$ と固定したまま，$x \in \mathsf{A}$ に対応する馬の勝率 $\mu_\sigma(x)$ が変わる場合を扱うことも可能である．たとえば，A は馬番のリストを表し，賭博場の胴元が履歴 σ に応じて，番号 $x \in \mathsf{A}$ に対応する馬を別の馬に変える場合などが考えられる．

この賭博競馬における博徒 M の資産過程を計算しよう．競馬の一着の履歴が σ の場合の博徒 M の資産が $\mathsf{capital}(\sigma)$ 円であったとする．このとき，もし馬 $x \in \mathsf{A}_\sigma$ が一着を取った場合の資産 $\mathsf{capital}(\sigma x)$ は，まず賭金 $(y_\sigma(x))_{x\in\mathsf{A}_\sigma}$ を没収された後，$y_\sigma(x)/\mu_\sigma(x)$ の配当を得るので，以下のように計算できる．

$$\mathsf{capital}(\sigma x) = \mathsf{capital}(\sigma) - \sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma} y_\sigma(x) + \frac{y_\sigma(x)}{\mu_\sigma(x)}$$

両辺を $\mu_\sigma(x)$ 倍すると，以下の式を得る．

$$\mathsf{capital}(\sigma x)\mu_\sigma(x) = \mu_\sigma(x)\left(\mathsf{capital}(\sigma) - \sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma} y_\sigma(x)\right) + y_\sigma(x)$$

この式について，$x \in \mathsf{A}_\sigma$ に対する総和を取れば，確率の和 $\sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma}\mu_\sigma(x) = 1$ であることから，以下の式が導出される．

$$\sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma} \mathsf{capital}(\sigma x)\mu_\sigma(x) = \mathsf{capital}(\sigma) - \sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma} y(x) + \sum_{x\in\mathsf{A}_\sigma} y(x) = \mathsf{capital}(\sigma)$$

式 (6.2) との類似性に注目しておこう．記述を単純化するために，固定リスト $\mathsf{A}_\sigma = \mathsf{A}$ の場合を考えると，各 $\sigma \in \mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ 毎に確率分布 $\mu_\sigma\colon \mathsf{A} \to [0,1]$ が指定されていることになる．この一般的な設定におけるマルチンゲールの定義案としては，以下を考えるのが妥当そうである．

定義案． 有限集合 A 上の確率分布の族 $\mu = (\mu_\sigma\colon A \to [0,1])_{\sigma\in\mathsf{A}}$ に対して，$d\colon \mathsf{A}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が **μ-マルチンゲール** (μ-*martingale*) であるとは，任意の $\sigma \in \mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ に対して以下の等式を満たすことである．

$$d(\sigma) = \sum_{x\in\mathsf{A}} d(\sigma x)\mu_\sigma(x)$$

ただ，この $\mu_\sigma(x)$ は確率分布の族と考えるよりは，「履歴 σ の下で次に x が出現する確率」という条件付き確率だと考える方が自然である．つまり，$\mu(\sigma)$ を履歴 $\sigma = \alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n$ の発生率とすると，$\mu_\sigma(x)$ は条件付き確率 $\mu_\sigma(x) = \mu(\sigma x)/\mu(\sigma)$ として表される．確率の和は $\sum_{x\in\mathsf{A}}\mu_\sigma(x) = 1$ であるから，$\sum_{x\in\mathsf{A}}\mu(\sigma x) = \mu(\sigma)$ となり，μ は以下の意味で確率測度を与える．

定義 7.1. 関数 $\mu\colon \mathsf{A}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が $\mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ 上の外測度 (outer measure) であるとは，以下の条件を満たすものである．

- (単調) $\sigma \sqsubseteq \tau$ ならば $\mu(\tau) \leqslant \mu(\sigma)$ である．
- (劣加法性) $\mu(\sigma) \leqslant \sum_{x\in\mathsf{A}}\mu(\sigma x)$ である．

劣加法性に関して，等号が成立するならば，μ は測度 (measure) であると呼ばれる．さらに，$\mu() = 1$ ならば，μ は確率測度 (probability measure) である．

ここまでの議論をまとめると，確率測度 $\mu\colon \mathsf{A}^{<\mathbb{N}} \to [0,1]$ に応じて，公平な胴元は配当倍率 Odds_μ を定める．これに対して，博徒は配当倍率 Odds_μ から測度 μ を予測し，この情報も用いながら賭博戦略を立てる．賭博戦略は資金過程から復元できるので，博徒が考えるべきは，資金過程すなわちマルチンゲールである．

定義 7.2. $\mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ 上の確率測度 μ に対して，$d\colon \mathsf{A}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ が **μ-マルチンゲール** (μ-*martingale*) であるとは，任意の $\sigma \in \mathsf{A}^{<\mathbb{N}}$ に対して以下の等式を満たすことである．

$$d(\sigma) = \sum_{x\in\mathsf{A}} \frac{d(\sigma x)\mu(\sigma x)}{\mu(\sigma)}$$

§8. 理論のモデル

論理学においては，ある理論体系が何を意味しているかを考えるために，モデルを考えるということは重要である．この際に，計算可能性理論が用いられることがしばしばある．たとえば，直観主義論理に対するクリーネの実現可能性解釈が代表例である．直観主義論理の意味論として，計算論を伴わないものとしては，ハイティング代数や直観主義クリプキ意味論などがある．

歴史上は，直観主義論理よりも古典論理の意味論が先に誕生した．古典論理の意味論においても，しばしば計算可能性理論のアイデアは用いられる．たとえば，二階算術の様々な重要なモデルを構成するために計算可能性理論の技術は重要である．

TODO: 二階算術の歴史

無矛盾性の確度という点で，二階算術に基づく体系は優れている．たとえば，型理論の場合，数学を展開するには少なくともゲーデルのシステム T 程度は認めたいところであるが，システム T の段階で，無矛盾性の確度は，ペアノ算術と同程度となる．一方，二階算術の場合には，基盤体系 RCA_0 や，それどころかより強い体系 WKL_0 を用いても，一階部分はペアノ算術より遥かに弱い $\mathsf{I}\Sigma_1$ というものになる．$\mathsf{I}\Sigma_1$ の Π_2 部分は，有限の立場の形式化としても扱われる原始再帰算術 PRA に相当し，いずれにせよペアノ算術より遥かに無矛盾性の確度という面で優れている．マーティンレフの型理論ともなると，二階算術においては極めて超越的なレベルの体系 ATR_0 程度の一階的強さとなる．

8.1. 二階算術

二階算術の体系は，大雑把に言えば 2 つの型 $\mathtt{N}$ と $\mathtt{N}^\mathtt{N}$ を持つ多ソート一階述語論理上の理論である．ここでは二階算術のモデルに注目しよう．より正確に二階算術の設定を記述しておく．

(1) 2 つの型 $\mathtt{N}$ と $\mathtt{N}^\mathtt{N}$ およびこれらの有限積
(2) 型 $\mathtt{N}$ 定数記号 $\underline{0}, \underline{1}$
(3) 型 $\mathtt{N}\times\mathtt{N}\to\mathtt{N}$ 関数記号 $+, \times$
(4) 型 $\mathtt{N}\times\mathtt{N}$ 上の関係記号 $\leqslant$
(5) 型 $\mathtt{N}^\mathtt{N}\times\mathtt{N}\to\mathtt{N}$ の関数記号 $\mathtt{eval}$

ここで重要な点は，$\mathtt{N}$ と $\mathtt{N}^\mathtt{N}$ の解釈が必ずしも自然数全体，自然数上の関数全体である必要はないと言った点である．実際，自然数全体の集合はまだしも，$\mathtt{N}^\mathtt{N}$ の解釈として自然数上の関数全体を考えることは殆ど無

いと言ってよい．それでは，$\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ がどのように解釈されるかというと，たとえば計算可能関数全体などである．

定義 8.1. $\mathtt{N}$ の解釈が自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ であり，$\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ の解釈が $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の部分集合であり，他の記号 $\underline{0}, \underline{1}, +, \times, \leqslant$, $\mathtt{eval}$ が標準的なものとして解釈されているモデルを **ω-モデル** (ω-*model*) と呼ぶ．

定義に注目すると，ω-モデルには，$\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ の解釈を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のどのような部分集合にするかという選択しかない．ω-モデルにおいて，型の有限積の解釈は標準的な直積によって解釈される．

注意. 二階算術の型として，以下の帰納的定義によって導入する方法もある．

(1) 基底型として $\mathtt{N}$ を持つ．
(2) 任意の型 $\mathtt{X}, \mathtt{Y}$ に対して，直積型 $\mathtt{X} \times \mathtt{Y}$ を持つ．
(3) 任意の型 $\mathtt{X}$ に対して，指数型 $\mathtt{X}^{\mathtt{N}}$ を持つ．

しかし，実際には $\mathtt{N} \times \mathtt{N} \simeq \mathtt{N}$ および $(\mathtt{N}^{\mathtt{N}})^{\mathtt{N}} \simeq \mathtt{N}^{\mathtt{N} \times \mathtt{N}} \simeq \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ を経由すれば，すべては 2 つの型 $\mathtt{N}$ と $\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ に帰着する．

以上より，ω-モデルの本質は，$\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ の解釈，つまり $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の部分集合 $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の選択しかないので，以後は $\mathcal{I}$ のことを ω-モデルと呼ぶ．ω-モデル $\mathcal{I}$ における解釈とは，論理式を字面通りに標準的に解釈し，関数量化 $\forall f \in \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ と $\exists f \in \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ についてだけは，量化範囲を $\mathcal{I}$ に変えて読み直す．

$$\forall f \in \mathtt{N}^{\mathtt{N}} \ldots \quad \rightsquigarrow \quad \forall f \in \mathcal{I} \ldots \qquad\qquad \exists f \in \mathtt{N}^{\mathtt{N}} \ldots \quad \rightsquigarrow \quad \exists f \in \mathcal{I} \ldots$$

したがって，ここで議論すべきは $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の部分集合に関する性質である．

定義 8.2. $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が**チューリング・イデアル** (*Turing ideal*) であるとは，以下の性質を満たすことである．

(1) $g \leqslant_T f \in \mathcal{I}$ ならば $g \in \mathcal{I}$ である．
(2) $f, g \in \mathcal{I}$ ならば $\langle f, g \rangle \in \mathcal{I}$ である．ここで，$\langle f, g \rangle(n) = \langle f(n), g(n) \rangle$.

イデアルという用語の由来は，上記の定義がチューリング前順序 $\leqslant_T$ に関するイデアルを表していると考えられるからである．ここで，$\langle f, g \rangle$ のチューリング次数が f, g のチューリング次数の上限を与えることに注意する．

例 8.3. 計算可能関数全体の集合 REC はチューリング・イデアルである．

定義 8.4. チューリング・イデアル $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が以下の性質を満たすとき，$\mathcal{I}$ は**ジャンプ・イデアル** (*jump ideal*) と呼ばれる．

(3) $f \in \mathcal{I}$ ならば $f' \in \mathcal{I}$ である．

例 8.5. 算術的定義可能関数全体の集合 ARITH はジャンプ・イデアルである．

計算可能関数全体の集合 REC はチューリング・イデアルだがジャンプ・イデアルではない．

定義 8.6. チューリング・イデアル $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が以下の性質を満たすとき，$\mathcal{I}$ は**スコット・イデアル** (*Scott ideal*) と呼ばれる．

(4) 任意の $f \in \mathcal{I}$ と任意の 2 値部分関数 $g \leqslant_T f$ に対して，$\mathcal{I}$ は g のある全域 2 値拡張を含む．

以下の関係が成り立つことは容易に確認できる．

$$\text{ジャンプ・イデアル} \implies \text{スコット・イデアル} \implies \text{チューリング・イデアル}$$

注意. スコット・イデアルは元々は算術の超準モデルの文脈で考察されていたものである．

命題 8.7. スコット・イデアルではないチューリング・イデアルが存在する．

Proof. $\mathcal{I}$ を計算可能関数全体の集合とすれば，これはチューリング・イデアルだがスコット・イデアルではない．なぜなら，計算可能関数 g を以下によって定義する．

$$g(e) = \begin{cases} \varphi_e(e) & \text{if } \varphi_e(e)\downarrow < 2 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\mathcal{I}$ がスコット・イデアルならば，g の全域拡張 $\widehat{g} \colon \mathbb{N} \to 2$ を含まなければならない．これは $\widehat{g}$ が計算可能関数であることを意味する．したがって，$\varphi(n) = 1 - \widehat{g}(n)$ も計算可能関数である．しかし，$\varphi = \varphi_p$ となる p について，$\widehat{g}(p) = \varphi_p(p) = \varphi(p) \neq \widehat{g}(p)$ となり矛盾である． □

Proof (別証). ペアノ算術で e 番目の論理式が証明可能ならば $g(e) = 1$, e 番目の論理式が反証可能ならば $g(e) = 0$, さもなくば $g(e)$ は停止しないとすると，関数 $g \colon\subseteq \mathbb{N} \to 2$ は部分計算可能関数である．ゲーデルの不完全性定理を用いて，この関数が計算可能全域拡張を持たないことを導くこともできる． □

ジャンプ・イデアルではないスコット・イデアルの存在証明はやや難しいので後の節に回す．ω-モデルを用いた論理式の解釈の例を挙げよう．

例 8.8 (選択公理). Π^0_1 選択公理 Π^0_1-AC_{00} とは，以下の主張である．

$$\forall n \in \mathtt{N} \exists m \in \mathtt{N}.\ A(n,m) \longrightarrow \exists f \in \mathtt{N}^{\mathtt{N}} \forall n \in \mathtt{N}.\ A(n, f(n))$$

ここで A は Π^0_1 論理式である．ω-モデル $\mathcal{I}$ における Π^0_1-AC_{00} の解釈は以下によって与えられる．

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}.\ A(n,m) \longrightarrow \exists f \in \mathcal{I} \forall n \in \mathbb{N}.\ A(n, f(n))$$

この式は $\mathcal{I} = \mathsf{REC}$ において偽である．なぜなら，$A(n,m)$ を $(\varphi_n(n) \neq m) \wedge (m < 2)$ とすると，上記の主張は計算可能部分関数の全域拡張の存在を表す主張である．しかし，既に見たように，そのような計算可能全域拡張は存在しないのであった．つまり，それは REC において偽であることを意味する．

注意 (二階算術の部分体系の ω-モデル). チューリング・イデアル，スコット・イデアル，ジャンプ・イデアルはそれぞれ二階算術の体系 RCA, WKL, ACA の ω-モデルの概念と一致する．

8.2. 数学の実装と部分同値関係

集合論，二階算術，あるいは型なしラムダ計算などもそうかもしれないが，型の少ない体系では，多くの数学的オブジェクトは天与のものではなく，自ら内部で組み立てる必要がある．たとえば型なしラムダ計算では，自然数 n はたとえばチャーチ数項 $\lambda sz.s^n z$ としてコードすることによって取り扱いが可能になる．集合論の体系では，自然数という概念をたとえばフォン・ノイマン順序数として集合のネストによってコードし，実数という概念をコーシー列の同値類あるいはデデキント切断としてコードして扱う．二階算術においては，自然数の型は最初からあるのでコードの必要はないが，実数の型は集合論と類似の方法でコードする．

二階算術の場合は，様々な数学的オブジェクトが定義可能な部分同値関係によって導入されると考えると分かりやすい．

例 8.9 (有理数)**.** たとえば，標準的な数学の体系では，有理数は以下のように実装される．

- $\mathtt{N}\times\mathtt{N}\times\mathtt{N}$ 上の論理式 $Q(i,a,b)$ を $i\leqslant 2$ によって定義する．
- $\mathtt{N}\times\mathtt{N}\times\mathtt{N}$ 上の 2 項関係 $(i,a,b)\sim_Q(j,c,d)$ を $(i=j\wedge ad=bc)\vee a=c=0$ として定義する．

この論理式の対 $(Q,\sim_Q)$ を有理数の型 $\mathtt{Q}$ であると考える．

これはもちろん通常の集合論における有理数の構成と全く同じものである．しかし，現実的には，有理数を自然数の 3 つ組そのままで扱うのではなく，

$$(0,a,b)\text{ のことは }\frac{a}{b}\text{ と書き，}(1,a,b)\text{ のことは }-\frac{a}{b}\text{ と書く}$$

といった糖衣構文を行うのが標準的であろう．また，有理数の型 $\mathtt{Q}$ を基に有理数列の型 $\mathtt{Q}^{\mathtt{N}}$ を構成することができる．これは実際には二階算術で型 $(\mathtt{N}^3)^{\mathtt{N}}$ を考えられることによる．さらに，部分同値関係上の部分同値関係と言ったように，構成はネストすることができる．

例 8.10 (実数)**.** たとえば，標準的な実数の構成法の一つは，有理数列上の同値関係を経由するものである．有理数上の算術は既に実装済であると仮定して話を進める．

- $\mathtt{Q}^{\mathtt{N}}$ 上の論理式 R を以下によって定義する．
$$R(f)\iff(\forall n,k\in\mathtt{N})\,|f(n)-f(n+k)|\leqslant 2^{-n}.$$
- $\mathtt{Q}^{\mathtt{N}}$ 上の 2 項関係 $\sim_R$ を以下によって定義する．
$$f\sim_R g\iff(\forall n\in\mathtt{N})\,|f(n)-g(n)|\leqslant 2^{-n+1}$$

この論理式の対 $(R,\sim_R)$ を実数の型 $\mathtt{R}$ であると考える．

言い換えれば，$R(f)$ とは，f が 2^{-n} 速度で収束する有理コーシー列であることを意味し，$\sim_R$ は f と g が任意に近づくことを意味する．ここで 2^{-n} のような特別な値を参照している点を訝しむ人もいるだろう．そのように頭の回る人は，すぐに 2^{-n} などの特別な値が除去可能であることに自ら気づくだろう．たとえば，以下のような論理式を考えれば，標準的な有理コーシー列と全く同じものである．

$$R'(f,N)\iff(\forall\varepsilon\in\mathtt{Q})(\forall n,m\in\mathtt{N})\,[\varepsilon>0\ \wedge\ n,m\geqslant N(\varepsilon)\to|f(n)-f(m)|\leqslant\varepsilon]$$

ところで，$(R,\sim_R)$ を実数の型と呼んだが，実際には，実数とは部分同値関係 $(R,\sim_R)$ における各同値類である．つまり，我々が扱いたい実数 x とは，$x\in R/{\sim_R}$ であるが，この商 $R/{\sim_R}$ という概念は二階算術には

先立っては存在していない．しかし，仮想的な商 $R/{\sim_R}$ が存在していると仮定した方が議論の見通しは良くなることが多い．

一般的に，二階算術の設定では，元来の型は $\mathtt{N}, \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ しかないが，部分同値関係を経由して様々な型を取り扱っていくことができる．また，形式的には，ここで，部分同値関係上の部分同値関係のようなネストもまた，単独の部分同値関係に還元できるという点も重要である．新たに導入された型の解釈は，$\mathtt{N}$ や $\mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ 等の解釈から誘導される．つまり，型 $\mathtt{X} = (X, \sim_X)$ について，X も $\sim_X$ も型 $\mathtt{N}, \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ 上の論理式にしか過ぎないから，構造があれば自動的に解釈が与えられる．このとき，型 $\mathtt{X}$ の解釈はこれらの解釈の商によって導入する．

定義 8.11. ω-モデル $\mathcal{I}$ における型 $\mathtt{X} = (X, \sim_X)$ の解釈は，以下によって与えられる．

(1) $X^{\mathcal{I}} = \{p \in \mathcal{I} : \mathcal{I} \models X(p)\}$.
(2) $p \sim_X^{\mathcal{I}} q \iff \mathcal{I} \models p \sim_X q$.
(3) $\mathtt{X}^{\mathcal{I}} := X^{\mathcal{I}}/{\sim_X^{\mathcal{I}}}$

例 8.12. REC を計算可能関数全体のなす ω-モデルとする．このとき，実数の型 $\mathtt{R}$ の REC における解釈を考えると，$\mathtt{R}^{\mathsf{REC}}$ は計算可能実数全体の集合となる．

例 8.13. 有界な単調有理数列はある実数に収束するという主張について考えよう．

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathtt{Q}^{\mathtt{N}}\, [(\forall n \in \mathtt{N}.\ f(n) \leqslant f(n+1) \wedge \exists m \in \mathtt{N} \forall n \in \mathtt{N}.\ f(n) < m) \\ \to \exists x \in \mathtt{R}\, (\forall \varepsilon \in \mathtt{Q}_{>0} \exists k \in \mathtt{N} \forall n \in \mathtt{N}.\ |x - f(n)| < \varepsilon)].\end{aligned}$$

この主張の ω-モデル $\mathcal{I}$ における解釈とは，以下のようなものである．

$$\begin{aligned}\forall f \in (\mathtt{Q}^{\mathtt{N}})^{\mathcal{I}}\, [(\forall n \in \mathtt{N}.\ f(n) \leqslant f(n+1) \wedge \exists m \in \mathtt{N} \forall n \in \mathtt{N}.\ f(n) < m) \\ \to \exists x \in \mathtt{R}^{\mathcal{I}}\, (\forall \varepsilon \in \mathtt{Q}_{>0} \exists k \in \mathtt{N} \forall n \in \mathtt{N}.\ |x - f(n)| < \varepsilon)].\end{aligned}$$

この主張は，計算可能関数のみからなる ω-モデル REC においては偽である．なぜなら，計算可能な有界単調列であって，計算可能実数には収束しないものが存在するためである．

一方で，上記の主張は，任意のジャンプ・イデアル $\mathcal{I}$ において真である．なぜなら，$\mathcal{I}$ に属す有界単調列 $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，そのチューリング・ジャンプを用いて極限 $\lim_n q_n$ を計算可能である．$\mathcal{I}$ はジャンプ・イデアルなので，この極限は $\mathcal{I}$ に属す．

■部分同値関係と外部参照: 我々は有理数や実数の型を実装したが，集合論の文脈ではこれを有理数や実数の「定義」と呼び，二階算術の文脈ではこれを有理数や実数の「コーディング」と呼ぶ人がいる．後者のコーディングの感覚としては，つまりはイデア界の数学的オブジェクトを参照して，それを体系内で実装しているという考え方によるものだろうか．それについては集合論でも二階算術でも状況は全く同じはずであるが，集合論は外部の仮想的世界を想像するのが難しいのに対して，二階算術は外部の仮想的世界を集合論的にモデル化可能なので，二階算術においてはこのような考え方に至る人が多いのかもしれない．

しかし，部分同値関係による新たな型の導入というアイデアを，上述のような外部参照とみなすという考え方は重要である．これについて説明するために，集合的な設定で部分同値関係を導入しよう．

定義 8.14. 集合 D 上の**部分同値関係** (*partial equivalence relation*) とは，対称律と推移律を満たす D 上の 2 項関係である．部分同値関係 $(D, \sim_X)$ から $(D, \sim_Y)$ への外延的関数 f とは，以下のようなものである．

(1) $x \sim_X x$ ならば $f(x)$ は定義されている．
(2) $x \sim_X y$ ならば $f(x) \sim_Y f(y)$ である．

次は，基本的な型を用いて，外的オブジェクトを参照するというアイデアである．二階算術の文脈では，所与の数学的オブジェクト X を型 $\mathtt{N}, \mathtt{N}^{\mathtt{N}}$ を経由してコードするという考え方である．

定義 8.15. *D*-**表現空間** (*D-represented space*) とは，集合 X と部分全射 $\delta\colon \subseteq D \to X$ の対である．$\delta(p) = x$ のとき，p は x の δ-コード (δ-code) あるいは単にコードであると呼ばれる．D-表現空間 (X, δ_X) と (Y, δ_Y) に対して，関数 $f\colon X \to Y$ の実現 $\mathtt{f}$ とは，以下のようなものである．

(1) $\mathtt{f}$ は D 上の部分関数である．
(2) $\mathtt{x} \in D$ が $x \in X$ のコードならば，$\mathtt{f}(\mathtt{x})$ は $f(x)$ のコードである．

実現を持つ関数を実現可能関数と呼ぶ．

注意． この概念と数化集合の類似について注意しておこう．つまり，$D = \mathbb{N}$ の場合が数化集合であり，計算可能実現を持つ関数が K_1-計算可能関数である．

実は部分同値関係による型の導入というアイデアと，外的な数学的対象のコード化というアイデアは，数学的に全く同一なものである．

定理 8.16. D 上の部分同値関係と外延的関数の圏と D-表現空間と実現可能関数の圏は同値である．

Proof. $(D, \sim_X)$ を部分同値関係とする．このとき，$D_X = \{x \in D : x \sim_X x\}$ に対する商集合 $X := D_X/{\sim_X}$ を考える．商写像 $p \mapsto [p]_X\colon D_X \to X$ は全射であり，これは部分全射 $\delta_X\colon \subseteq D \to X$ とみなせる．また，外延的関数 $f\colon (D, \sim_X) \to (D, \sim_Y)$ に対して $[f]([x]_X) = [f(x)]_Y$ と定義すると，これは関数 $[f]\colon X \to Y$ を与える．ここで，$Y = D_Y/{\sim_Y}$ は上記と同様に定義される．このとき，$[f]$ は f によって実現される関数である．

逆に，(X, δ_X) を D-表現空間とする．このとき，D 上の部分同値関係 $p \sim_X q$ を $\delta_X(p) = \delta_X(q)$ によって定義する．実現可能関数 $f\colon X \to Y$ の実現 $F\colon \subseteq D \to D$ を考えると，これは $(D, \sim_X)$ から $(D, \sim_Y)$ への外延的関数である．

部分同値関係から表現空間への構成を F, 表現空間から部分同値関係への構成を G とすると，明らかに $GF = \mathrm{id}$ である:

$$p \sim_{GFX} q \iff \delta_{FX}(p) = \delta_{FX}(q) \iff [p]_X = [q]_X \iff p \sim_X q.$$

一方，$FG(X, \delta_X)$ は δ_X から得られる実効同値関係の商集合と商写像の対である．これは元の (X, δ_X) と同型である． $\square$

8.3. スコット・イデアルとコンパクト性

スコット・イデアルの扱いのためには，まずはコンパクト性の計算論的扱いを整備する必要がある．本節では，計算可能性理論における位相空間論のアナロジーを導入しよう．我々がこれから行うことは，位相の全く入っていない構造に対して，位相の概念を導入することなく，位相空間論を部分的に展開することである．

まずは，基本的なアイデアを述べよう．位相空間論における基本概念は開集合であるが，開集合の概念は関数的に記述することができる．

事実 8.17. 位相空間 X の部分集合 $U \subseteq X$ が開であることと，特性写像 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ が連続であることは同値である．

ここで，$\mathbb{S}$ はシエルピンスキ空間である．つまり，台集合は $\{\top, \bot\}$ であり，開集合は $\varnothing, \{\top\}, \{\top, \bot\}$ からなる．もちろん，事実 8.17 は，シエルピンスキ空間の定義から明らかである．シエルピンスキ空間は，2 点からなる非ハウスドルフ的な連結空間という一見すると反例的な空間に見えるが，実際には，位相空間を関数的に扱うための根源的な空間である．

■表現空間上の綜合位相: ここでは K_2-計算可能性理論を抽象化した $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-表現空間の理論における位相概念を導入する．以後は，単に計算可能と言った場合には，K_2-計算可能性を意味するものとする．まず，$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-表現空間におけるシエルピンスキ空間とは，以下のものとする．

例 8.18 (シエルピンスキ空間)**.** シエルピンスキ空間 $\mathbb{S} = \{\top, \bot\}$ は，以下の関数 $\delta_{\mathbb{S}} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{S}$ によって表現される．

$$\delta_{\mathbb{S}}(p) = \top \iff \exists n \in \mathbb{N}.\ p(n) \neq 0$$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上には連続性と計算可能性の概念の両方が導入されていたことに注意しよう．

定義 8.19. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$-表現空間の間の関数 f が**実現可能** (*realizable*) であるとは，連続な実現を持つことを意味する．同様に，f が**計算可能** (*computable*) であるとは，K_2-計算可能な実現を持つことを意味する．

表現空間は必ずしも位相を備えているとは限らないが，シエルピンスキ空間を経由して位相のような概念を導入することができる．

定義 8.20. 表現空間 X の部分集合 $U \subseteq X$ が**開** (*open*) とは，特性写像 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ が連続実現可能であることを意味する．同様に，$U \subseteq X$ が**計算可能開** (*computably open*) とは，特性写像 $\chi_U : X \to \mathbb{S}$ が計算可能であることを意味する．

記法. 表現空間 X の開集合を指数表現空間 $\mathbb{S}^X$ の元と同一視することによって，開集合全体のなす超空間は表現空間をなし，これをしばしば $\mathcal{O}X$ と書く．

開集合と同様に，閉集合も写像として表示できる．具体的には，写像 $\chi : X \to \mathbb{S}$ が閉集合 $A = \{x \in X : \chi(x) \neq \top\}$ に対応する．このような χ のことを以後は $\neg A$ と書くことにする．開集合の場合と同様に，指数表現空間 $\mathbb{S}$ を閉集合の超空間とみなしている場合には，それを $\mathcal{A}X$ と書く．

位相空間論 X, Y に対して，関数 $f : X \to Y$ が連続であるとは，任意の開集合 $U \subseteq Y$ の逆像 $f^{-1}[U] \subseteq X$ が開集合であることであった．つまり，関数 $f^{-1} : \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ が定義されることに対応する．

定義 8.21. 表現空間 X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ が**計算的連続** (*computably continuous*) とは，$f^{-1}\colon \mathcal{O}Y \to \mathcal{O}X$ が計算可能であることを指す．実現的連続性も同様の方法によって定義される．

$$\text{計算的連続} \implies \text{実現的連続} \implies \text{連続}$$

命題 8.22. 任意の計算可能写像は計算的連続であり，実現可能写像は実現的連続である．実際，以下の変換は計算可能である．

$$f \mapsto f^{-1}\colon Y^X \to \mathcal{O}X^{\mathcal{O}Y}$$

Proof. 逆像写像が $f^{-1} = \lambda U.(U \circ f)$ と書けることに注意すると，目的の変換は $\lambda f.\lambda U.(U \circ f)$ であるから計算可能である．もう少し丁寧にアイデアを説明すれば，まず $\mathcal{O}X$ を $\mathbb{S}^X$ の形に書き直して，逆カリー化していく．

$$\left(Y^X \to (\mathbb{S}^X)^{\mathbb{S}^Y}\right) \simeq (Y^X \times \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}^X) \simeq (X \times Y^X \times \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}).$$

いま，型 $X \times Y^X \times \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}$ の写像 $(x, f, U) \mapsto U(f(x))$ は，評価射と合成の組合せによって得られるから，計算可能である．このカリー化は $(f, U) \mapsto \lambda x.U(f(x)) = f^{-1}[U]$ であり，もう一度カリー化すると $f \mapsto \lambda U.f^{-1}[U] = f^{-1}$ であるから，目的の変換の計算可能性を得た． □

■コンパクト性: 通常の位相空間論において，位相空間 X がコンパクトとは，任意の開被覆が有限部分被覆を持つことを意味する．この定義から計算的な意味を抽出するとすれば，以下である．

与えられた開集合族 $\mathcal{U}$ が X を被覆しているならば，それを有限ステップで認識可能である．

もう少し話を単純にするために，開集合族でなく単独の開集合 U を考えて，U が X を被覆していることの有限ステップ認識可能性について考察しよう．有限ステップ認識可能性を空間的に理解すると，これはシエルピンスキ空間への計算可能写像である．

定義 8.23. 表現空間 X が**計算的コンパクト** (*computably compact*) とは，以下の条件を満たす写像 $\forall^X\colon \mathcal{O}X \to \mathbb{S}$ が計算可能であることを意味する．

$$\forall^X(U) = \top \iff X \subseteq U$$

実現的コンパクト性も同様の方法によって定義される．

記法. 以後，$\forall^X(U)$ のことを $\forall^X x.U(x)$ と略記する．実際，以下が成立している．

$$\forall^X x.U(x) = \top \iff (\forall x \in X)\ U(x) = \top.$$

一般的に，部分集合 $K \subseteq X$ が**計算的コンパクト** (*computably compact*) であるとは，$\forall^K\colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ が計算可能であることを意味する．ここで，$\forall^K(U)$ は $K \subseteq U$ の真理値である．

ともあれ，コンパクト性を計算的に解釈すると，ある意味での全探索可能性に相当する．$\mathbb{S}$ が標準的なシエルピンスキ空間であれば，超立方体 $[0,1]^k$ やカントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ などは計算的コンパクトになる．素朴に考えると，このような連続体濃度を持つ空間 X の場合，X 全域で開性質 U が成立することの半決定 $\forall^X x.U(x)$ のためには，無限にある各点 x 毎に $U(x)$ が成立するか確認しなければならないため，その確認完了には無限

のステップが必要そうに感じる．しかし，計算的コンパクト性の驚くべき帰結として，X 全域での U の成立 $\forall^X x.U(x) = \top$ は有限ステップで認識可能なのである．

それでは，コンパクト性の数学的性質の分析を始めよう．いま，$\mathbb{S} \simeq \mathcal{O}\mathbf{1}$ であることに注意し，開集合と閉集合を反転させれば，コンパクト空間の定義は，射影 $\pi\colon \mathcal{A}(X \times \mathbf{1}) \to \mathcal{A}\mathbf{1}$ の実現可能性と考えることができる．一般的に，以下で示すように，コンパクト空間において，射影 $\pi\colon \mathcal{A}(X \times Y) \to \mathcal{A}Y$ は実現可能である．また，位相空間論において，「コンパクト空間の連続像はコンパクトである」という主張が成立するが，この計算的類似も成立する．

命題 8.24. 表現空間 X に対して，以下の条件は同値である．

(1) X は計算的コンパクトである．

(2) 余射影 $\forall^X_\pi\colon \mathcal{O}(X \times Y) \to \mathcal{O}Y$ は計算可能である．

$$y \in \forall^X_\pi(U) \iff \forall x \in X\ (x, y) \in U$$

(3) 射影 $\pi\colon \mathcal{A}(X \times Y) \to \mathcal{A}Y$ は計算可能である．

(4) 任意の計算可能全射 $f\colon X \to Y$ に対して，Y は計算可能コンパクトである．

Proof. (1)⇒(2): 余射影 $\forall^X_\pi$ の定義より，$\forall^X_\pi(U)(y) = \forall^X x.U(x, y)$ であることに注意すれば，$\forall^X_\pi$ は項 $\lambda U.\lambda y.\forall^X x.U(x, y)$ によって計算される．

(1)⇒(4): $f^{-1}[U] = U \circ f$ であったことを思い出せば，

$$\forall^Y y.U(y) = \top \iff Y = f[X] \subseteq U \iff X \subseteq f^{-1}[U] \iff \forall^X x.U(f(x)) = \top$$

であるから，$\forall^Y(U) = \forall^X(U \circ f)$ である．いま，f のコードを知っており，仮定より $\forall^X$ は計算可能であるから，$\forall^Y = \lambda U.\forall^X(U \circ f)$ は計算可能である．よって，Y は計算可能コンパクトである．

(2)⇔(3)⇒(1): 明らか．(4)⇒(1): $f = \mathrm{id}$ を考えればよい． □

もちろん，計算的コンパクト集合が本当に位相的コンパクト性と対応するのかについて確認しておく必要がある．ただし，計算論的設定では非可算族の取り扱いには余計な労力を払う必要があるので，ここでは計算的コンパクト性が可算コンパクト性を導くことを示すのみとしておく．

命題 8.25. K を計算的コンパクト空間とする．このとき，任意の開集合列 $U_0, U_1, \dots \in \mathcal{O}(K)$ に対して，もし $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ ならば，ある $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して，$K \subseteq \bigcup_{n\leqslant\ell} U_n$ となる．

Proof. K は計算的コンパクトであり，$K \subseteq \bigcup_n U_n$ であるという仮定より，$\forall^K(\bigcup_n U_n) = \top$ は有限ステップで認識される．つまり，$\bigcup_n U_n$ の有限情報を読み込んだ時点で，K はこれに被覆されたと宣言される．いま，U_n のコードを $p_n \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ とすると，$\bigcup_n U_n$ のコードとして「与えられた入力に対して，各 p_n を順次読み込み，そのどれかの計算結果が $\top$ となったら，$\top$ を返す」という文を考える．この文の有限情報を読み込んだ時点では，まだ p_n たちのうち有限個しか読み込み始めていないにも関わらず，被覆を宣言しなければならない．この時点で $(p_n)_{n\leqslant\ell}$ までしか言及されていないとすると，$p_{\ell+1}$ 以降を空集合のコードに入れ替えても，もう被覆の宣言は撤回できない．したがって，$K \subseteq \bigcup_{n\leqslant\ell} U_n$ が成立していなければならない． □

■ベール空間におけるコンパクト性: さて，実際にどのような空間が計算的コンパクトであるか理解する必要があるだろう．ここでは，$\mathbb{N}^\mathbb{N}$ の計算的コンパクト部分集合の特徴付けを行おう．関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f := \{g \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall n.\ g(n) \leqslant f(n)\}$ と定義する．

定理 8.26. $A \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ について，以下の条件は同値である．

(1) A は計算的コンパクトである．

(2) ある計算可能関数 f について，A は $\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f$ の計算可能閉部分集合である．

まず，上界を与えて関数空間を制限することで，コンパクト部分集合を得よう．このために必要なものは，ケーニヒの補題である．これは，任意の有限分岐木が無限個のノードを持つならば，無限パスを持つことを主張する補題である．

補題 8.27. 任意の計算可能関数 f に対して，$\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f$ は計算的コンパクトである．

Proof. 任意の計算可能汎関数 $U\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f \to \mathbb{S}$ は計算可能関数 $u\colon \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \upharpoonright f \to \mathbb{S}$ から誘導される．木 $T_u := \{\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \upharpoonright f : \forall \sigma \sqsubseteq \tau.\ u(\sigma) \neq \top\}$ を考える．ここで，$u(\sigma) \neq \top$ とは，$u(\sigma)$ が $|\sigma|$ ステップまでに計算した結果の $\mathbb{S}$ の元のコードの中に 0 のみしか出現しないことを意味する．このとき，T_u は計算可能木であり，$\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f \subseteq U$ であることと T_u が無限パスを持たないことは同値である．$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \upharpoonright f$ が始切片関係 $\sqsubseteq$ について有限分岐木であるから，特に T_u も有限分岐木である．したがって，ケーニヒの補題より，後者は T_u が有限であることと同値である．T_u は計算可能な有限分岐木であるので，T_u が有限であることは認識可能である． □

補題 8.28. 計算的コンパクト空間の計算可能閉部分集合は計算的コンパクトである．

Proof. K を計算可能コンパクト空間とし，計算可能開集合 $V \subseteq K$ に対して，$A = K \backslash V$ とする．このとき，$A \subseteq U$ であることと $K \subseteq U \cup V$ であることは同値であるから，$\forall^A = \lambda U.\forall^K(U \cup V)$ である．和集合演算 $\cup\colon \mathcal{O}(K)^2 \to \mathcal{O}(K)$ は計算可能なので，$\forall^A\colon \mathcal{O}(K) \to \mathbb{S}$ は計算可能である． □

以上より，(2)⇒(1) の方向性は示された．逆に，$\mathbb{N}^\mathbb{N}$ の計算的コンパクト集合には上界が存在することを示す．

補題 8.29. $K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ が計算的コンパクトならば，ある計算可能関数 f が存在して，$K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f$ である．

Proof. 各 $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対して，開集合 $\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright \sigma := \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \forall n < |\sigma|.\ f(n) \leqslant \sigma(n)\}$ を考える．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(\mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright \sigma)_{\sigma \in \mathbb{N}^n}$ は $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ の開被覆である．K のコンパクト性より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright \sigma_n$ となる $\sigma_n \in \mathbb{N}^n$ が存在する．また，計算的コンパクト性より，そのような $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を計算できる．いま，$f(n) = \sigma_{n+1}(n)$ とすれば，$K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \upharpoonright f$ である． □

以上より，定理 8.26 は導かれた．

■スコット・イデアルの基底定理: ここまでで分析した計算的コンパクト性の特性を用いて，幾つかの計算論的な定理を証明しよう．以下は Jockusch と Soare の 1987 年の論文「Π^0_1 類と理論の次数 (Π^0_1 classes and degrees of theories)」において証明された低基底定理 (low basis theorem) と呼ばれるものである．元の証明は，サックス強制法のような木の強制法の文脈によって与えられているが，コンパクト集合の被覆という観点に注目すれば，以下のように容易に証明できる．

定理 8.30 (低基底定理)**.** 任意の空でない計算的コンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ は $x' \leqslant_T \varnothing'$ となる $x \in K$ を持つ．

Proof. 任意の計算可能関数 Φ に対して，$\lambda f.\Phi(f)\colon \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{S}$ は計算可能なので，$\{f : \Phi(f)\downarrow\} \in \mathcal{O}(X)$ である．いま，$K_0 = K$ とする．帰納的に計算的コンパクト集合 $K_e \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ が定義されたとする．$U_e := \{f : \Phi_e(f)\downarrow\}$ とする．チューリング・ジャンプの定義より，$U_e = \{f : f'(e) = 1\}$ である．K_{e+1} を以下によって定義する．

$$K_{e+1} = \begin{cases} K_e & \text{if } K_e \subseteq U_e \\ K_e \backslash U_e & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 8.28 より，K_{e+1} は計算的コンパクトである．いま，各 K_e は空ではないので，コンパクト性より，ある元 $x \in \bigcap_{e\in\mathbb{N}} K_e$ が存在する．もし $K_e \subseteq U_e$ ならば，特に $x \in U_e$ なので $x'(e) = 1$ であり，さもなくば，$x \in K_{e+1} = K_e\backslash U_e$ なので，$x'(e) = 0$ である．この条件分岐は，$\forall_{K_e}(U_e)$ の真理値に依存し，この $\mathbb{S}$-値は計算可能であるから，そのブール値は停止問題を用いて計算できる．これは $x' \leqslant_T \varnothing'$ であることを意味する． □

計算的コンパクト集合の他の特性として，そこから得られる関数には必ず上界があるというものがある．関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が**計算被支配的** (*computably dominated*) とは，任意の全域関数 $g \leqslant_T f$ に対して，ある計算可能関数 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $g(n) \leqslant h(n)$ となることである．つまり，f は急増大関数を計算しないという特性である．

以下の定理も 1987 年の Jockusch と Soare によるもので，元々の証明は少し難解であるが，コンパクト集合の連続像がコンパクトであるという位相的性質に注目すれば，かなり容易に証明できる．

定理 8.31 (被支配基底定理)**.** 任意の空でない計算的コンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ は計算被支配的な $f \in K$ を持つ．

Proof. コンパクト集合の連続像はコンパクトであることを用いる．いま，$K_0 = K$ とする．帰納的に計算的コンパクト集合 $K_e \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ が定義されたとする．部分計算可能汎関数 $\Phi_e\colon \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ が K_e 上全域なら $K_{e+1} = K_e$ とする．さもなくば，ある $f \in K_e$ と $n \in \mathbb{N}$ について，$\Phi_e(f)(n)\uparrow$ である．そのような $n \in \mathbb{N}$ を固定する．このとき，$U_e = \{f \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : \Phi_e(f)(n)\downarrow\}$ が計算可能開集合であることに注意すると，補題 8.28 より，$K_{e+1} = \{f \in K_e : \Phi_e(f)(n)\uparrow\}$ は空でない計算的コンパクト集合である．したがって，コンパクト性より，ある元 $f \in \bigcap_{e\in\mathbb{N}} K_e$ が存在する．

関数 $g \leqslant_T f$ を計算するプログラムを e とする．つまり．$g = \Phi_e(f)$ である．もし Φ_e が K_e 上全域ならば，

命題 8.24 より $\Phi_e[K_e]$ は計算的コンパクトなので，定理 8.26 より計算可能な上界 h を持つ．いま，$f \in K_e$ なので，$g(n) = \Phi_e(f)(n) \leqslant h(n)$ である．もし Φ_e が K_e 上全域でないならば，$f \in K_{e+1}$ について，$\Phi_e(f)(n)\uparrow$ である．したがって，$g = \Phi_e(f)$ は全域関数ではない． □

注意. 歴史的経緯から，計算被支配性は，hyperimmune-free と呼ばれることもある．Simpson だけが用いている用語として，almost recursive というものもある．

注意. 強制法の文脈では，上記のアイデアは，サックス強制法の ω^ω-bounding 性に近い．ただし，強制法の文脈では，関数の生成法が連続的なもの以外も許容されるので，いわゆる continuous reading of names と呼ばれる性質（関数の連続近似）と組み合わせる必要がある．

さて，ジャンプ・イデアルならばスコット・イデアルであり，スコット・イデアルならばチューリング・イデアルであった．一方で，チューリング・イデアルであったとしてもスコット・イデアルとは限らない．低基底定理あるいは被支配基底定理のいずれかを用いることによって，スコット・イデアルであったとしてもジャンプ・イデアルとは限らないことを証明できる．

命題 8.32. ジャンプ・イデアルではないスコット・イデアルが存在する．

Proof. ここでは低基底定理を用いた証明を紹介する．$x_0 = \varnothing$ とし，$\varphi_e^n\colon\subseteq \mathbb{N} \to 2$ を e 番目の x_n-計算可能 2 値部分関数とする．第 $\langle e,n\rangle$ ステップで $x_{\langle e,n\rangle+1} \in 2^{\mathbb{N}}$ を定義する．対関数の性質より，$n \leqslant \langle e,n\rangle$ であるから，第 $\langle e,n\rangle$ ステップ開始時点で x_n は定義されているとしてよい．もし x_n が定義されているならば，$P_e^n = \{f \in 2^{\mathbb{N}} : f \text{ extends } \varphi_e^n\}$ は x_n-計算可能閉集合である．したがって，低基底定理 8.30 より，ある $y' \leqslant_T x_n'$ について，$y \in P_e^n$ となる．このとき，$x_{\langle e,n\rangle+1} = y$ と定義する．

いま，$I = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と定義したとき，これがジャンプ・イデアルでないスコット・イデアルであることを示そう．まず，帰納的に，任意の $y \in I$ について $y' \leqslant_T \varnothing'$ であることを示す．各 $y \in I$ は $y = x_0$ または $y = x_{\langle e,n\rangle+1}$ の形である．前者の場合，$x_0 = \varnothing$ なので，$x_0' \leqslant_T \varnothing'$ であることは明らかである．後者の場合，構成と帰納的仮定より，$x'_{\langle e,n\rangle+1} \leqslant_T x_n' \leqslant_T \varnothing'$ である．特に $\varnothing'' \notin I$ であるから，I はジャンプ・イデアルでないことが導かれる．

I がスコット・イデアルであることを示すために，$x_n \in I$ を任意に取る．x_n-計算可能 2 値部分関数 φ_e^n の全域拡張が I に含まれることを示せばよい．構成より $x_{\langle e,n\rangle+1} \in P_e^n$ であるから，これは φ_e^n の全域拡張であり，I に属す．したがって，I はスコット・イデアルである． □

注意 (二階算術の部分体系の ω-モデル)**.** チューリング・イデアル，スコット・イデアル，ジャンプ・イデアルはそれぞれ二階算術の体系 $\mathsf{RCA}, \mathsf{WKL}, \mathsf{ACA}$ の ω-モデルの概念と対応していたから，以上より，これらの二階算術の体系の強さが異なることが導かれる．

$$\mathsf{RCA} < \mathsf{WKL} < \mathsf{ACA}$$

注意 (理論の無矛盾完全拡大)**.** 逆数学の文脈では，WKL は完全性定理と同値であることが知られており，これはスコット・イデアルと理論の無矛盾完全拡大との関連性にも結びついている．ゲーデルの第一不完全性定理より，ペアノ算術を含む無矛盾かつ完全な理論（ペアノ算術の無矛盾完全拡大）で計算可能な公理化を持つものは存在しないが，この事実からスコット・イデアルではないチューリング・イデアルの存在を導くことも

可能である．実際，Jockusch と Soare の 1987 年の論文の目的は，ペアノ算術の無矛盾完全拡大の計算不可能性の分析にあった．

§9. 超限再帰，代数と余代数

9.1. 記号系と代数

■記号系: 記号系 (signature) とは，記号の集合 L と各 $f \in L$ への集合 $\mathsf{ar}(f)$ の割当の組 (L, ar) である．$\mathsf{ar}(f)$ のことをしばしば f の項数 (arity) と呼ぶ．項数 0 の記号はしばしば定数記号と呼ばれる．

記号系は，ひとつの関数 $\mathcal{L}\colon I \to L$ にまとめることができる．つまり，I として項数たちの非交叉和 $\sum_{f \in L} \mathsf{ar}(f)$ と射影 $\mathcal{L}(f, i) = f$ を考えれば，ファイバー $\mathcal{L}^{-1}\{f\}$ から項数の情報を復元できる．したがって，以後は写像 $\mathcal{L}\colon I \to L$ のことを記号系と呼ぶこともある．

例 9.1. 2 項関数記号 $+$ と定数記号 $\underline{0}$ からなる記号系は，$L_{\mathsf{add}} = \{+, 0\}$ および $\mathsf{ar}(+) = 2$ かつ $\mathsf{ar}(\underline{0}) = 0$ として与えられる．

項数は必ずしも自然数である必要はない．たとえば，無限総和 $\sum$ などを含む記号系を考えてもよいし，一般に集合 I に対する I 項演算の概念を考え得る．我々が特に興味があるのは，可算演算を持つ記号系である．

例 9.2. 定数記号 $\underline{0}$, 1 項関数記号 $\mathtt{succ}$ および ω 項関数記号 $\mathtt{sup}$ からなる記号系は，$L_{\mathtt{Ord}} = \{\underline{0}, \mathtt{succ}, \mathtt{sup}\}$ および $\mathsf{ar}(\underline{0}) = 0$, $\mathsf{ar}(\mathtt{succ}) = 1$, $\mathsf{ar}(\mathtt{sup}) = \omega$ として与えられる．

■記号の解釈: 集合 M における関数記号 f の解釈とは，写像 $f^M\colon M^{\mathsf{ar}(f)} \to M$ である．一般に，集合 M における記号系 L の解釈とは，各関数記号 $f \in L$ に対する解釈 f^M の割り当てである．記号系 L の解釈は，以下のようにまとめることができる．

$$L^M\colon \sum_{f \in L} M^{\mathsf{ar}(f)} \to M$$

集合 M と解釈 L^M の組 (M, L^M) はしばしば L-代数 (L-algebra) あるいは L-構造 (L-structure) と呼ばれる．$\mathsf{ar}(f) = I$ であるとき，$L^M(f, \langle x_i \rangle_{i \in I})$ のことを $f^M(\langle x_i \rangle_{i \in I})$ と書くこともある．

少し別の観点からの記述も与えておこう．記号系 $\mathcal{L}\colon I \to L$ に対して，しばしば $\sum_{f \in L} M^{\mathsf{ar}(f)}$ のことを $\mathsf{Poly}_{\mathcal{L}}(M)$ と書く．したがって，記号系 $\mathcal{L}$ に対する代数とは，写像 $\mathcal{L}^M\colon \mathsf{Poly}_{\mathcal{L}}(M) \to M$ のことである．

例 9.3. L_{add}-代数の例としては，$+, \underline{0}$ を自然数上の標準的な加法および零元と解釈するものがある．

$$L^{\mathbb{N}}_{\mathsf{add}}(+, a, b) = a + b \qquad L^{\mathbb{N}}_{\mathsf{add}}(\underline{0}) = 0$$

$\mathsf{Poly}_{\mathcal{L}_{\mathsf{add}}}(M) = M^2 + 1$ に対して，上記の解釈は写像 $L^{\mathbb{N}}_{\mathsf{add}}\colon \mathbb{N}^2 + 1 \to \mathbb{N}$ とみなすこともできる，

例 9.4. $L_{\mathtt{Ord}}$-代数の例としては，$\underline{0}, \mathtt{succ}, \mathtt{sup}$ を順序数上の標準的な演算として解釈するものがある．

$$L^{\mathsf{Ord}}_{\mathtt{Ord}}(\underline{0}) = 0 \qquad L^{\mathsf{Ord}}_{\mathtt{Ord}}(\mathtt{succ}, \alpha) = \alpha + 1 \qquad L^{\mathsf{Ord}}_{\mathtt{Ord}}(\mathtt{sup}, (\alpha_n)_{n \in \omega}) = \sup_{n \in \omega} \alpha_n$$

$\mathsf{Poly}_{\mathcal{L}_{\mathtt{Ord}}}(M) = 1 + M + M^{\omega}$ に対して，上記の解釈は写像 $L^{\mathsf{Ord}}_{\mathtt{Ord}}\colon 1 + \mathsf{Ord} + \mathsf{Ord}^{\omega} \to \mathsf{Ord}$ とみなすこともできる．

■項モデル: 記号系 L に含まれる記号を組み合わせて得られる記号列は，L-項 (L-term) と呼ばれる．形式的には，以下のように定義される．

- 変数記号 x および定数記号 $c \in L$ は項である．
- $f \in L$ が I-項関数記号であり，各 $i \in I$ に対して t_i が項ならば，$f(\langle t_i \rangle_{i \in I})$ もまた項である．
- 変数記号を含まない項は閉項 (closed term) と呼ばれる．

ここで，定数記号が存在しないならば，閉項は存在しないことに注意する．記号系 L の閉項全体 term_L は，関数記号の恒等解釈によって L-代数をなす．

$$L^{\mathsf{term}_L} \colon \sum_{f \in L} \mathsf{term}_L^{\mathsf{ar}(f)} \to \mathsf{term}_L; \qquad\qquad L^{\mathsf{term}_L}(f, \langle t_i \rangle_{i \in I}) = f(\langle t_i \rangle_{i \in I})$$

記号の解釈は常に項の解釈に拡張できる．つまり，構造 M における記号の解釈 $L^M \colon \sum_{f \in L} M^{\mathsf{ar}(f)} \to M$ は，項の解釈 $\widehat{L}^M \colon \mathsf{term}_L \to M$ に拡張できる．実際，項モデル term_L からは任意の L-代数 M に対して，構造を保つ写像が伸びており，この意味で，term_L は L-始代数 (initial algebra) である．

項の構文木を考えると，これは整礎 (well-founded) である．つまり，部分項関係は有限ステップで停止する．構文木に注目すれば，項モデル term_L はラベル付き整礎木たちの集合である．型理論の用語を用いると，項モデル term_L は，帰納型 (inductive type) あるいは W-型 (W-type) と呼ばれるものに相当する．

■最小不動点: L-項の定義に注目しよう．このような定義法は，帰納的定義 (inductive definition) と呼ばれる．つまり，定義には，既に構成された A から何かを構成するプロセス $\Gamma(A)$ を記述し，$A \cup \Gamma(A)$ を得る．この操作を Γ が新たな要素を構成しなくなるまで繰り返す．つまり，$\Gamma(A) \subseteq A$ となるまで繰り返すということである．たとえば，項の帰納的定義の場合には，

$$\Gamma(A) = \{f(\bar{t}) : f \in L \text{ and } \bar{t} \in A^{\mathsf{ar}(f)}\}$$

を考えている．帰納的定義を数学的に定式化する際は，$\Gamma(A) \subseteq A$ となる最小の A として概念を定義する行為として導入することが多いだろう．

$$\mathsf{fix}(\Gamma) := \bigcap \{A : \Gamma(A) \subseteq A\}$$

つまり，$\mathsf{fix}(\Gamma)$ は，$A \mapsto A \cup \Gamma(A)$ の最小不動点 (least fixed point) であり，帰納的定義とは，最小不動点による定義とする考え方である．しかし，最小不動点の定義は極めて非構成的である．この形式的定義には，集合 A に対する全称量化が現れている．我々が帰納的定義を行う際に，このような集合の全探索を行う上からの構成よりも，徐々に要素を構築していく下からの構成を考えていることの方が多いはずだ．つまり，我々が帰納的定義として念頭に置いているのは，たとえば以下のようなプロセスである．

$$\Gamma^0(A) = A \qquad\qquad \Gamma^{<\alpha}(A) = \bigcup_{\beta < \alpha} \Gamma^\beta(A) \qquad\qquad \Gamma^\alpha(A) = \Gamma^{<\alpha}(A) \cup \Gamma(\Gamma^{<\alpha}(A))$$

このプロセスの場合には，空集合 $\varnothing$ からスタートして，$\Gamma^{\alpha+1}(\varnothing) = \Gamma^\alpha(\varnothing)$ となる α を探索するものが，帰納的定義である．一般的には，自然数 α ではこのプロセスは停止せず，多くの場合に，順序数 α を考える必要がある．$\Gamma^{\alpha+1}(\varnothing) = \Gamma^\alpha(\varnothing)$ となる順序数は閉包順序数 (closure ordinal) と呼ばれる．

定理 9.5. Γ が単調であるとき，Γ の閉包順序数 α に対して，$\mathsf{fix}(\Gamma) = \Gamma^\alpha(\varnothing)$ である．

帰納的定義と超限累積的定義の分析，そしてそれらの複雑性や閉包順序数の分析は，特に 1960 年代の計算可能性理論における主要トピックであった．

9.2. 記法系と余代数

■クリーネの記法系: 計算可能性理論における代数系の分析は，数化された代数系の研究から始まった．しかし，記号系が可算項演算 f を含んでいる場合，項 $f(\bar{t})$ を直接記述しようとすると，これは有限記号列ではなく，無限記号列となってしまう．とはいえ，可算項演算であっても，無限列 $\bar{t}$ がラムダ項などのプログラムによって表されているとき，$f(\bar{t})$ は有限記号列によって表示できる．実際，計算可能性理論における多くの可算項演算の扱いはこのようなものであった．

計算論の誕生を 1936 年とするならば，計算論の最初期の研究は，可算項演算を伴う代数系の中でも特に順序数に注意が向けられた．その代表的なものが，クリーネの 1938 年の論文「順序数記法について (On notation for ordinal numbers)」である．

例 9.6 (クリーネ 1938)**.** 記号系 L_{Ord} の項を以下の方法でコード化する．

(1) 数 1 は定数記号 $\underline{0}$ をコードする．
(2) 数 a が項 t をコードするならば，数 2^a は項 $\mathrm{succ}\ t$ をコードする．
(3) 各 n について，数 $\varphi_e(n)$ が項 t_n をコードするならば，数 $3 \cdot 5^e$ は項 $\sup_n t_n$ をコードする．ここで，φ_e は e 番目の部分計算可能関数である．

このコード法は，クリーネの順序数記法系あるいはクリーネの $\mathcal{O}$ と呼ばれる．同様の方法で，高々 ω-項演算を持つ可算記号系の項の数化を考えることができる．

例 9.7. 可算記号系 $L = \{f_i\}_{i\in\omega}$ の項を以下の方法でコードする．もし各 $n < \mathsf{ar}(f_i)$ について，$\varphi_e(n)$ が項 t_n をコードするならば，$\langle i, e\rangle$ は項 $f(\langle t_n\rangle_{n<\mathsf{ar}(f_i)})$ をコードする．

項のコードたちの集合も帰納的定義によって与えられているから，最小不動点である．関数 $\Gamma\colon \mathcal{P}\mathbb{N} \to \mathcal{P}\mathbb{N}$ が算術的可測あるいは算術的であるとは，ある算術的論理式 φ が存在して，以下が成立することを指す．

$$n \in \Gamma(X) \iff \varphi(n, X)$$

クリーネの $\mathcal{O}$ は算術的作用素による再帰的定義によって与えられている．つまり，算術的作用素の最小不動点として表せる．

命題 9.8. 算術的単調作用素の最小不動点は Π^1_1 である．

■余代数: コード化された対象を取り扱うとき，具体的なコードの陽な参照は可能な限り避けるべき[*27]であり，その本質的性質のみを利用した議論をすべきである．クリーネのコード化の本質的な点は，項 $f(\bar{t})$ のコードから f のコードと $\bar{t}$ のコードを復元できることである．

記法系 L が与えられているとする．いま，各 $a \in A$ が I-項関数記号 $f \in L$ と $\bar{t} \in A^I$ について，$a = f(\bar{t})$ として表されるとき，A は L-余代数 (L-coalgebra) であると呼ばれる．形式的には，以下のような写像 L_A を備えた集合 A のことを指す．

$$L_A\colon A \to \sum_{f\in L} A^{\mathsf{ar}(f)}.$$

---

*27 具体的なコードを参照すると，誰にでも容易に理解できる議論であっても，その特定のコード化を把握している人にしか理解が困難になる．これによって，全く同じ対象を「異なるコード」を用いて扱っている 2 人がお互いの話を全く理解できないどころか，全く同じ対象を扱っていることにすら気づかないということがしばしばある．

実際，この代数と余代数の性質が，クリーネが 1938 年の論文で要求していたものである．より正確には，クリーネが要求していたものは，およそ $L^A \circ L_A = \mathrm{id}$ に相当する性質が含まれる．歴史的なコメントをしておけば，1938 年のクリーネはこの性質を持つ順序数のコード化を r-system と呼び，その具体例としてクリーネの $\mathcal{O}$ を提示したに過ぎない．

例 9.9 (クリーネ)**.** $\mathcal{O}$ を $L_{\mathtt{Ord}}$-項のコード全体の集合とすると，$\mathcal{O}$ は $L_{\mathtt{Ord}}$-余代数である．

$$\mathcal{O} \to \sum_{f \in L_{\mathtt{Ord}}} \mathcal{O}^{\mathsf{ar}(f)}; \qquad 1 \mapsto \underline{0}, \qquad 2^a \mapsto \langle \mathtt{succ}, a \rangle, \qquad 3 \cdot 5^e \mapsto \langle \mathtt{sup}, \varphi_e(n) \rangle_{n \in \omega}$$

この写像は計算可能であることにも注意しておこう．クリーネの $\mathcal{O}$ の余代数構造は，各順序数への基本列の割り当て，つまり，梯子系に相当するものである．

例 9.10 (梯子系)**.** 極限順序数 $\alpha < \omega_1$ の基本列 (fundamental sequence) とは，α の下で共終であるような単調増大列である．極限順序数 $\alpha < \omega_1$ に対する基本列 s_α の割当 $(s_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ を集合論ではしばしば梯子系 (ladder system) と呼ぶ．梯子系を固定する毎に，ω_1 への $L_{\mathtt{Ord}}$-余代数としての構造が与えられる．

$$\omega_1 \to \sum_{f \in L_{\mathtt{Ord}}} \omega_1^{\mathsf{ar}(f)}; \qquad 0 \mapsto \underline{0}, \qquad \alpha + 1 \mapsto \langle \mathtt{succ}, \alpha \rangle, \qquad \lambda \mapsto \langle \mathtt{sup}, s_\lambda(n) \rangle_{n \in \omega}$$

ここで，λ は極限順序数である．

L-余代数は必ずしも L-項の集合ではないが，部分項関係を拡張できる．まず，A が L-余代数ならば，各 $b \in A$ について $b = f(\bar{a})$ と表示できる．より正確には，$L_A(b) = \langle f, (a_i)_{i \in I} \rangle$ と表示できるが，このとき，各 a_i を b の直部分項であると呼び，$a_i \sqsubseteq_1 b$ と書く．このとき，部分項関係は以下のように拡張できる．

$$a \sqsubseteq b \iff \exists a_1, \dots, a_n \ (a = a_1 \sqsubseteq_1 a_2 \sqsubseteq_1 \dots \sqsubseteq_1 a_n = b)$$

例 9.11. $\mathcal{O}$ における部分項関係は，しばしば $\leqslant_{\mathcal{O}}$ と書かれる．

部分項関係によって，L-余代数は木構造をなす．L-始代数の要素，すなわち L-項はその構文木を見ると，ラベル付き整礎木になっていた．一方で，L-余代数の要素はラベル付き木とみなせるものの整礎木とは限らないことに注意する．実際，L-余代数の場合には，たとえば無限ループが発生するということもあり得る．以後，L-余代数 A の元 $a \in A$ から構成されるラベル付き木を T^A_a と書くことにする．ラベルを無視すれば，これは a の部分項全体の集合上の部分項関係と対応する．

$$T^A_a \simeq (\{b \in A : b \sqsubseteq a\}, \sqsubseteq).$$

以下，高々 ω 項関数記号とは，$\mathsf{ar}(f) \in \omega \cup \{\omega\}$ であることを意味する．

観察 9.12. L は高々 ω 項関数記号しか含まないと仮定する．L-余代数 A に対して，もし L_A が計算可能関数ならば，任意の $a \in A$ に対して T^A_a は枚挙可能である．

Proof. T^A_a を $A^{<\omega}$ の部分集合として枚挙する．まず，$L_A(a) = \langle f, (c_i)_{i \in I} \rangle$ ならば，根のラベルを f とし，各 $\langle c_i \rangle$ を T^A_a に並べる．もし $\sigma \in T^A_a$ が既に並んでおり，σ の最後の値が b ならば，b の直部分項毎に σ の直後のノードを追加する．つまり，もし $L_A(b) = \langle g, (c_i)_{i \in I} \rangle$ ならば，σ のラベルを g とし，各 $\sigma^\frown c_i$ を T^A_a に並べる．この方法によって，木 $T^A_a \subseteq A^{<\omega}$ は枚挙される． □

例 9.13. 記号系 L が計算可能とは，L が数化集合であり，高々 ω 項関数記号しか含まないものであるとする．数化集合と計算可能関数の圏における L-余代数を計算可能 L-余代数と呼ぶことにする．つまり，A が計算可能 L-余代数とは，A が数化集合であり，L_A が計算可能であることを指す．

たとえば，$\mathcal{O}$ は計算可能 L-余代数であり，観察 9.12 より，各 $a \in \mathcal{O}$ に対して $T_a^{\mathcal{O}}$ は枚挙可能である．クリーネの $\mathcal{O}$ に関するこの観察は，$\{b \in \mathcal{O} : b <_{\mathcal{O}} a\}$ あるいは $\{(c,b) : c \leqslant_{\mathcal{O}} b <_{\mathcal{O}} a\}$ の枚挙可能性として提示されることが多い．

余代数とラベル付き木との関係は明らかであろう．記号系 L に対して，木 T と整合的なラベル付けとは，関数 $\ell \colon T \to L$ であり，$I = \mathsf{ar}(\ell(\sigma))$ に対して，σ が I-分岐ノードであることを指示するものである．つまり，σ の直後のノード全体が $\{\tau_i\}_{i \in I}$ によって表される．この条件を形式的に記述すると，以下の写像を与えていることに他ならない．

$$T \to \sum_{f \in L} T^{\mathsf{ar}(f)}; \qquad \sigma \mapsto \langle \ell(\sigma), \{\tau_i\}_{i \in I} \rangle$$

つまり，整合的なラベル付けは，木に L-余代数としての構造を与えるものである．記号系 L と整合的にラベル付け可能な木全体の集合は，終余代数と呼ばれるものに対応する．型理論の文脈では，余帰納型 (coinductive type) あるいは M-型 (M-type) と呼ばれるものに相当する．

9.3. 再帰定理

プログラム中で自己言及が可能であることを数学的に保証するクリーネの再帰定理は，計算論における基本定理の一つである．この定理は，クリーネの 1938 年の論文「順序数記法について」において発表されたもので，この定理の最初の応用は，超限再帰の計算可能性を保証するためにあった．これについて説明するために，超限帰納法について復習しよう．

■整礎性と超限帰納法: まず，二項関係 $(P, <)$ が整礎であるとは，任意の空でない部分集合 $S \subseteq P$ が極小元を持つことである．

$$S \neq \varnothing \implies \exists x \in S \forall y < x.\ y \notin S$$

この式の対偶を取ると，以下の式を得る．

$$\forall x \in S \exists y < x.\ y \in S \implies S = \varnothing.$$

左辺を略さずに丁寧に書くなら，$\forall x (x \in S \to \exists y < x.\ y \in S)$ であり，括弧の内側の対偶を取ると，以下を得る．

$$\forall x [(\forall y < x.\ y \notin S) \to x \notin S] \implies S = \varnothing$$

いま，与えられた論理式 φ に対して，$S = \{z \in P : \neg\varphi(z)\}$ を考える．量化領域が P であることを明示すれば，上記の式は以下のように変形できる．

$$\forall x \in P\ [(\forall y < x.\ \varphi(y)) \to \varphi(x)] \implies \forall z \varphi(z). \tag{9.1}$$

式 (9.1) は，整礎性の定義を対偶だけを用いて同値変形した結果なので，単に「整礎性の定義の対偶」と呼ぶことにする．この「整礎性の定義の対偶」は，P 上の**超限帰納法** (*transfinite induction*) と呼ばれる．

観察 9.14. 任意の整礎二項関係上の超限帰納法が成立する．

Proof. 超限帰納法は整礎性の定義の対偶のことであったから自明である． □

対偶を認めない数学者はまず存在しないから，超限帰納法はすべての数学者にとって自明に成立する原理である．もちろん，一般的に，二項関係の整礎性を証明する際に困難が生じることはあるが，事前に整礎性が保証されたものに対する超限帰納法は単なる対偶である．

以上より，超限帰納法は自明な原理であるが，とはいえ対偶という非直観主義的原理を用いている故に，計算可能性を議論する際に発生し得る問題を危惧する人もいるだろう．これを解決するものが，クリーネの実効超限再帰である．

■実効超限再帰と W-型: まずは項モデルの構造帰納法について議論しよう．いま，記号系 L が固定されているとして，L-項に関する論理式 φ が与えられているとしよう．項上の帰納法とは，以下の原理である．関数記号 f と項 $\bar{t} = (t_i)_{i \in \mathsf{ar}(f)}$ に関して

(帰納ステップ) 任意の $i \in \mathsf{ar}(f)$ に対して $\varphi(t_i)$ が成立しているときは $\varphi(f(\bar{t}))$ も成立している

が常に成り立つときは，任意の項 t に対して，$\varphi(t)$ が成立している．もちろんこれは直部分項関係 $\sqsubseteq_1$ に対する超限帰納法であると言ってもよい．

ここで扱うものは，これを更に一般化した，超限再帰法 (transfinite recursion) と呼ばれるものである．項の文脈では，値 $x(t_i)$ から値 $x(f(\bar{t}))$ を構成する方法を与えることによって，$t \mapsto x(t)$ を構成するというもので，つまりは項上の関数の再帰的構成である．クリーネの実効超限再帰は，$s = f(\bar{t})$ であったとき，f と $x(t_i) \in M$ たちの情報から $x(s) \in M$ を構成するプロセス ψ があるとき，$t \mapsto x(t)$ は常に計算可能であるというものである．つまり，$x \colon \mathsf{term}_L \to M$ は計算可能である．

定理 9.15 (クリーネの実効超限再帰)**.** 計算可能関数 $\psi \colon \sum_{f \in L} M^{\mathsf{ar}(f)} \to M$ が与えられているとき，ある計算可能関数 $x \colon \mathsf{term}_L \to M$ が存在して，以下が成立する．

$$x(f(\langle t_i \rangle_{i \in \mathsf{ar}(f)})) = \psi(f, \langle x(t_i) \rangle_{i \in \mathsf{ar}(f)}).$$

Proof. 項モデルは代数であると同時に余代数でもあるので，$f(\bar{t})$ の情報から f と $\bar{t}$ の情報を復元できる．再帰定理より，計算可能関数の定義は自己言及を含んでよいので，ψ の計算可能性より，主張の等式を満たすような計算可能関数 x を構成できる．

後は x が全域関数である，つまり，任意の $t \in \mathsf{term}_L$ に対して $x(t)$ の計算が停止することを示せばよい．c が定数記号の場合には，主張の等式は $x(c) = \psi(c)$ を意味するから，ψ の全域性より $x(c)$ は定義される．いま，項 $f(\bar{t})$ を考え，各 $x(t_i)$ が定義されてるとする．このとき，$\psi(f, \langle x(t_i) \rangle_{i \in I})$ は定義され，主張の等式より，この値は $x(f(\bar{t}))$ と一致する．したがって，超限帰納法より，$x(t)$ はすべての項 t に対して定義されるので，$x \colon \mathsf{term}_L \to M$ が全域関数であることが示された． □

項上の関数の再帰的構成の本質を抽出したい．クリーネの実効超限再帰を図式的に表すと，以下のようなも

のである．

$$\begin{CD}
\sum_{f\in L} \mathsf{term}_L^{\mathsf{ar}(f)} @>>> \sum_{f\in L} M^{\mathsf{ar}(f)} \\
@VVV @VV{\psi}V \\
\mathsf{term}_L @>>{x}> M
\end{CD}$$

つまり，クリーネの実効超限再帰とは，数化集合と計算可能関数の圏 **Num** において，M が L-代数であるとき，L-代数の射 $\mathsf{term}_L \to M$ が存在することを述べている．この性質は，項モデル term_L が L-始代数であることの定義である．したがって，クリーネの実効超限再帰を抽象的に述べれば，これは

圏 **Num** において term_L が L-始代数をなす

ということを述べる定理である．より正確には，クリーネは記号系 $L = L_{\mathsf{Ord}}$ のみに着手していたが，他の計算可能記号系への一般化は自明である．

項モデルが始代数であることは，関数記号の解釈を項の解釈へと拡張可能であることに対応する．したがって，超限再帰法における帰納ステップは，関数記号の解釈を与えることであり，超限再帰法は，それを項の解釈へと拡張することだと考えてもよい．

上では，一つの集合 M に値を取る関数の再帰的構成を取り扱ったが，もう少しの一般化が可能である．いま，項 t 毎に集合 X_t が与えられているとしよう．項 $s = f(\bar{t})$ に対して，

(帰納ステップ) 任意の $i \in \mathsf{ar}(f)$ に対して $x_i \in X_t$ を得ているときは $\psi(s, \bar{x}) \in X_s$ も得ることができる

が常に成り立つことを示せたとする．このとき，任意の項 t に対して，$x(t) \in X_t$ を以下の条件を満たすものとして得ることができる．

$$s = f(\bar{t}) \implies x(s) = \psi(s, \langle x(t_i)\rangle_{i\in\mathsf{ar}(f)})$$

命題 9.16. term_L が L-始代数ならば，L-項上の一般的な再帰的構成を実現できる．

Proof. いま，$T = \mathsf{term}_L$ かつ $\tilde{X} = \sum_{t\in T} X_t$ とすると，帰納ステップで与えられたプロセス ψ は以下のような関数であるとみなせる．

$$\tilde{\psi}\colon \sum_{f\in L} \tilde{X}^{\mathsf{ar}(f)} \to \tilde{X}; \qquad (f, \langle t_i, x_i\rangle_{i\in I}) \mapsto \langle f(\bar{t}), \psi(f(\bar{t}), \bar{x})\rangle$$

ここで，$I = \mathsf{ar}(f)$ であり，$\bar{t} = \langle t_i\rangle_{i\in I}$ かつ $\bar{x} = \langle x_i\rangle_{i\in I}$ である．したがって，$\tilde{X}$ は L-代数をなす．L-始代数の性質より，L-代数の射 $\mathsf{term}_L \to \tilde{X}$ が存在するが，これは以下の図式が可換であることを意味する．

$$\begin{CD}
\sum_{f\in L} \mathsf{term}_L^{\mathsf{ar}(f)} @>>> \sum_{f\in L} \tilde{X}^{\mathsf{ar}(f)} \\
@VVV @VV{\tilde{\psi}}V \\
\mathsf{term}_L @>>{(j,x)}> \tilde{X}
\end{CD}$$

元を追跡すると，以下のようになっている．

$$\begin{tikzcd}
(f,\bar{t}) \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & (f,\langle j(t_i),x(t_i)\rangle_{i\in I}) \arrow[d, mapsto] \\
f(\bar{t}) \arrow[r, mapsto] & (j(f(\bar{t})),x(f(\bar{t}))) \arrow[r, equal] & (f(\langle j(t_i)\rangle_{i\in I}),\psi(f(\langle j(t_i)\rangle_{i\in I}),\langle x(t_i)\rangle_{i\in I}))
\end{tikzcd}$$

しかし，この可換性を満たすためには $j=\mathrm{id}$ でなければならないことを帰納的に示すことができる．もし c が定数記号ならば，$(j(c),x(c))=\tilde{\psi}(c)=(c,\psi(c))$ であり，さもなくば帰納的に $j(f(\bar{t}))=f(\bar{t})$ を得る．したがって，上記の可換図式は，単に $x(f(\bar{t}))=\psi(f(\bar{t}),\langle x(t_i)\rangle_{i\in I})$ を意味するものであるが，これが目的の式であった． □

この一般的な超限再帰法は，W-型の除去規則と計算規則としても知られるものである．形式的には，W-除去規則とは，以下によって与えられるものである．いま，項 t 毎に集合 X_t が与えられているとしよう．関数記号 f と項 $\bar{t}=(t_i)_{i\in\mathsf{ar}(f)}$ に関して

> (帰納ステップ) 任意の $i\in\mathsf{ar}(f)$ に対して $x_i\in X_{t_i}$ を得ているときは $\psi(f,\bar{t},\langle x_i\rangle_{i\in\mathsf{ar}(f)})\in X_{f(\bar{t})}$ も得ることができる

が常に成り立つことを示せたとする．このとき，任意の項 t に対して，$x(\psi,t)\in X_t$ を得ることができる．さらに，W-計算規則は，$x(\psi,f(\bar{t}))=\psi(f,\bar{t},\langle x(\psi,t_i)\rangle_{i\in\mathsf{ar}(f)})$ が成立することを保証する．

以上より，クリーネの実効超限再帰とは，数化集合と計算可能関数の圏 $\mathbf{Num}$ において W-型が存在することを主張するものと言い換えることもできる．

注意． クリーネの実効超限再帰とは，一言で言えば「超限再帰が計算可能な原理である」ということを示すものであり，言い換えれば「圏 $\mathbf{Num}$ において項モデル term_L が始代数である」ということを示すものであった．前者で説明すると「超限再帰が計算可能だなんて，そんなことあり得るのか！？」と感じる人も多いと思うが，後者で説明すると「項モデル term_L が始代数なんてそんなの当たり前だろう」という感覚になる人も多いだろう．人間の直感とはいい加減なものである．ちなみにクリーネは，順序数 ($L_{\mathtt{Ord}}$-項) 上の超限再帰という目的でしか，実効超限再帰をほとんど利用していない．

例 9.17. 歴史的な実効超限再帰の最初の応用は，順序数の加法が計算可能であることを示すことにあった．具体的には，順序数記法 $\mathcal{O}$ 上の和を超限再帰によって定義できる．

$$\begin{cases} a+\underline{0}=a \\ a+\mathtt{succ}(b)=\mathtt{succ}(a+b) \\ a+\mathtt{sup}_n b_n=\mathtt{sup}_n(a+b_n) \end{cases}$$

つまり，$\mathsf{add}_a(t)=a+t$ と書けば，上記の式は $\mathsf{add}_a(t_i)$ から $\mathsf{add}_a(f(\bar{t}))$ を与える計算可能なプロセスを与えている．したがって，実効超限再帰によって，add_a が計算可能であることが示される．実際には，$\lambda a.\mathsf{add}_a$ を超限的に構成することによって，$+\colon\mathcal{O}^2\to\mathcal{O}$ の計算可能性を示すことが可能である．

§ 10. クリプキ意味論と前層

10.1. 構成的論理とその解釈

数学には構成的証明と非構成的証明と呼ばれるものがある．たとえば，数学には「ある x が存在する」ということを主張するタイプの定理，つまり存在定理 $\exists x\varphi(x)$ が多数あるが，この証明には，いくつかの方法があり得る．まず，そのような存在の証拠 x を具体的に構成するというタイプの証明で，これが構成的証明というものである．一方で，存在の証拠を発見せずとも，存在証明を行う方法がある．それは「存在しないと仮定して矛盾を導く」という背理法である．これはあくまで $\neg\exists x\varphi(x)$ を仮定して矛盾が導かれたというだけで，$\varphi(x)$ を満たす x が具体的に与えられるわけではない．このような証明が，非構成的証明である．

数学の証明をこのように構成的証明と非構成的証明へと分別して，構成的証明だけで得られる数学の定理とは如何様なものかを分析するのも興味深いだろう．存在定理の構成的証明のアイデアを拡張して，あらゆる論理式に対して，構成的証明とは何であるかを考えよう．構成的証明とは，各論理式の正しさの証拠を保持しながら証明を進める手続きである．ここで，論理式の証拠とは以下のように帰納的に定義される．

(1) A が原始論理式ならば，A の証拠とは A の証明である．
(2) $A \wedge B$ の証拠とは，A の証拠と B の証拠の対である．
(3) $A \vee B$ の証拠とは，どちらの式が正しいかの言及 i と，正しい側の式の証拠 p の対 $\langle i, p\rangle$ である．より正確には，$i = 0$ ならば p は A の証拠であり，$i = 1$ ならば p は B の証拠である．
(4) $A \to B$ の証拠とは，次を満たす関数 f である．もし x が A の証拠ならば，$f(x)$ は B の証拠である．
(5) $\exists xA(x)$ の証拠とは，対 $\langle a, p\rangle$ である．ここで，p は $A(a)$ の証拠である．
(6) $\forall xA(x)$ の証拠とは，次を満たす関数 f である．量化領域内の任意の x について，$f(x)$ は $A(x)$ の証拠である．

このアイデアは，いわゆる**ブラウワー-ハイティング-コルモゴロフ解釈** (*Brower-Heyting-Kolmogorov interpretation*) あるいは略して **BHK 解釈**と呼ばれるものである．この概念の原点は，1900 年代から 10 年代にブラウワー (L. E. J. Brouwer) が導入した**直観主義論理** (*intuitionistic logic*) と呼ばれるものにある．ブラウワーが直観主義のアイデアを導入した後，しばらくしてブラウワーの理解者たちが，直観主義の論理を「正しさの証拠を構成可能な論理」として説明した．それが上述の BHK 解釈である．

ともあれ，このように「数学的言明の証明には常に証拠の構成が伴う」という形式の数学もまた有用であろう，という流れが生まれ，それは**構成主義** (*constructivism*) と呼ばれた．現代では，もう少しマイルドに，証拠を常に追跡できるような数学の断片の分析を行う様々な研究があり，そのような数学を総じて，**構成的数学** (*constructive mathematics*) と呼ぶ．

ブラウワーの直観主義論理（構成的論理）は，当初はヒルベルトとの論争に代表されるように，当時の数学界から強い反発にあった．しかし，この新たな論理は後にブラウワーのラディカルな思想と切り離され，その結果，コンピュータ科学の論理として確立し，大きな発展を遂げることとなる．

さて，注意するならば，BHK 解釈自体には計算可能性は全く介在していない．たとえば，$A \to B$ の解釈は，あくまで A の証拠を B の証拠に変換する関数に過ぎず，その関数の計算可能性などは明示的には要求されていない．ブラウワーが直観主義数学について思索を巡らせていた時代には，まだ計算可能性理論どころか「計算可能性の定義」すら存在していなかったから，もちろんこれは当然のことだろう．しかし，1930 年代に計算可能性の厳密な数学的定義が提唱されてしばらくすると，この直観主義論理のアイデアについて再考しよ

うという動きが見られるようになった．

その重要な第一ステップとして，BHK 解釈にアルゴリズムによる計算可能性をミックスしたものが，1945 年のクリーネによる**実現可能性解釈** (*realizability interpretation*) である．たとえば，含意 $\to$ は計算可能性を用いて解釈される．具体的には，クリーネの実現可能性解釈においては，

$A \to B$ の証拠は，A の証拠を入力すると B の証拠を出力とするアルゴリズム（計算可能関数）

と解釈される．もう少しクリーネの実現可能性解釈を正確に説明するために，用語を導入しておこう．

記法． 以後，「データ」と言った場合，コンピュータで取り扱える何らかの情報のことを表すものとする．プログラム $\mathtt{p}$ にデータ $\mathtt{a}$ を入力した計算結果を $\mathtt{p} * \mathtt{a}$ と書くことにする．

BHK 解釈のポイントは，各論理式 A に対して，正しさの証拠 $\mathtt{a}$ を割り当てることである．以後，「$\mathtt{a}$ が論理式 A の正しさの証拠である」ということを $\mathtt{a} \vdash A$ と書くことにする．クリーネの実現可能性解釈のアイデアは，データと論理式の間の二項関係 $\vdash$ を次のようにして定義することである．

$$\begin{aligned}
\langle \mathtt{a}, \mathtt{b} \rangle \vdash A \wedge B \quad &\iff \quad (\mathtt{a} \vdash A \text{ and } \mathtt{b} \vdash B), \\
\langle i, \mathtt{a} \rangle \vdash A \vee B \quad &\iff \quad \mathtt{if}\ i\ \mathtt{iszero}\ \mathtt{then}\ \mathtt{a} \vdash A\ \mathtt{else}\ \mathtt{a} \vdash B, \\
\mathtt{p} \vdash A \to B \quad &\iff \quad (\forall \mathtt{a})\ [\mathtt{a} \vdash A \implies \mathtt{p} * \mathtt{a} \vdash B], \\
\langle n, \mathtt{a} \rangle \vdash \exists x A(x) \quad &\iff \quad \mathtt{a} \vdash A(n), \\
\mathtt{p} \vdash \forall x A(x) \quad &\iff \quad (\forall n)\ \mathtt{p} * n \vdash A(n).
\end{aligned}$$

ここで，クリーネの最初の実現可能性解釈は，直観主義算術に対するものであり，つまり，各量化の領域は自然数である．じっくり読めば，上で説明した BHK 解釈を計算可能性理論で実装したものだと納得してくれるだろう．クリーネは，$\mathtt{a} \vdash A$ が成立することを「$\mathtt{a}$ が論理式 A を実現する」と呼んだ．これが実現可能性解釈という名の由来である．

ともあれ，このような方法で，クリーネは，計算可能関数が直観主義算術を解釈することを示したのである．こうすると，たとえば直観主義論理で排中律が一般的には成立していないことの理由を計算可能性理論を用いて説明することができる．たとえば，

プログラム $\mathtt{p}$ に n を入力した計算が有限時間で停止する　または　停止しない

という言明を考えよう．チューリングの定理より，与えられたプログラムの実行結果が有限時間で停止するか否かを判定する計算可能なアルゴリズムは存在しない．したがって，上の選言文のどちらが正しいかの証拠を計算可能な方法で与えることはできない．

10.2. クリプキ意味論

直観主義論理の解釈として，ここまでで実現可能性解釈を挙げたが，他にも様々な解釈が知られている．そのうちのひとつとして，**クリプキ意味論** (*Kripke semantics*) と呼ばれるものがあり，これは計算可能性とはまた別の方法で直観主義論理の解釈を与えるものである．これを説明するために，まず BHK 解釈を思い出そう．たとえば，$\varphi \vee \psi$ が正しいと述べるためには，その時点で既に φ と ψ のどちらが正しいかを既に知っていなければならない．そうすると「各時点 t で論理式 φ が真か偽か」を議論する意味論を考えるのは自然だと考えられる．しかし，「時点」と言ってしまうと，時間直線を考えているようであるが，ここではもう少し一般的な設定を考えたい．時間に従って，世界は刻々と変化していくが，我々は未来がどのようになっているか知

らない．未来の可能性は不確定で，未来は様々な形に分岐し得る．だから，「世界の可能性」は直線的な構造をしているのではなく，分岐構造あるいはより複雑な構造をしているかもしれない．したがって，「時点」というよりは，「現在の世界 w で論理式 φ が真か偽か」を議論する意味論を考えるべきだろう．これがおおよそクリプキ意味論のアイデアである．

クリプキ意味論には様々なバリエーションがある．たとえば，世界の可能性は樹状に分岐していき，一度分岐した世界が再び合流することはない，という意味論も考えられる．しかし，一般のクリプキ意味論では，分岐した世界が後に合流することもあるし，可能性はかなり自由自在である．クリプキ意味論は，元々，様相論理の解釈のために生まれた意味論であって，直観主義論理を解釈するためのクリプキ意味論はそのうちのごく一部である．直観主義クリプキ意味論は，数学的にはとても易しくて，世界の可能性全体は半順序 $(W, \leqslant)$ をなす．たとえば，$v, w \in W$ について，$v < w$ であるとき，w は v の未来（の１つ）であると考える．直観主義クリプキ意味論は，各 $w \in W$ において論理式 φ が真であるか否かを議論し，もし真であるならば $w \Vdash \varphi$ と書く．形式的には，まず，直観主義命題論理に対するクリプキ意味論は，以下のように与えられる．

定義 10.1. **直観主義クリプキモデル** (*intuitionistic Kripke model*) とは，3 つ組 $(W, \leqslant, V)$ である．ここで，$(W, \leqslant)$ は半順序であり，V は各命題変数 p に対して，W の上方集合を割り当てる関数である．つまり，$v \in V(p)$ かつ $v \leqslant w$ ならば $w \in V(p)$ を満たす．

直感的には，$V(p)$ とは，命題変数 p が真であるような世界全体である．クリプキモデルの条件は，ある世界において真であると確定した各命題変数は，それ以降も真であると確定しているという状況を表す．我々は構成的論理あるいは証拠付き論理の解釈を考えており，$w \in V(p)$ は世界 w において命題変数 p の証拠を得たならば，それ以降もこの証拠は失われずに保管される，ということを意味しているものと思ってよいだろう．

定義 10.2. 直観主義クリプキモデル $(W, \leqslant, V)$ が与えられたとき，W の元と論理式の間の関係 $\Vdash$ を以下のように帰納的に定義する．

(1) p が命題変数ならば，$w \Vdash p \iff w \in V(p)$.

(2) $w \Vdash \varphi \wedge \psi \iff w \Vdash \varphi$ and $w \Vdash \psi$.

(3) $w \Vdash \varphi \vee \psi \iff w \Vdash \varphi$ or $w \Vdash \psi$.

(4) $w \Vdash \varphi \to \psi \iff (\forall v \geqslant w)\ [v \Vdash \varphi \implies v \Vdash \psi]$.

また，$\neg A$ は $A \to \bot$ の略記とし，いかなる世界 $w \in W$ においても $w \Vdash \bot$ は成り立たないとする．以後，$w \Vdash \varphi$ が成り立たないことを $w \nVdash \varphi$ と書く．この記号を用いると，否定の解釈は以下によって与えられる．

(4′) $w \Vdash \neg\varphi \iff (\forall v \geqslant w)\ [v \nVdash \varphi]$.

上記の直観主義クリプキモデルの定義が BHK 解釈のアイデアをなんとなく反映していると納得できるだろう．たとえば，ある時点 w で $\varphi \vee \psi$ が正しいことを主張するためには，その時点で既に φ と ψ のどちらが正しいかを述べなければならない．

これは直観主義命題論理に対するクリプキ意味論であるが，直観主義述語論理に対するクリプキ意味論も類似のアイデアで与えられる．ただし，述語論理の場合は，量化記号があるので，変数の走る領域を指定する必要がある．とはいえ，世界は刻一刻と変化するので，この領域もまた刻一刻と変化する．つまり，世界 $w \in W$ 毎に領域 D_w が指定されるはずであり，そして，おそらく次のように解釈されることだろう．

(5) $w \Vdash \exists x \varphi(x, \bar{y}) \iff (\exists c \in D_w)\ w \Vdash \varphi(c, \bar{y})$.

(6) $w \Vdash \forall x\varphi(x,\bar{y}) \iff (\forall v \geqslant w)(\forall c \in D_v)\ [v \Vdash \varphi(c,\bar{y})]$.

ここで $\bar{y} = y_1, \ldots, y_n \in D_w$ である．たとえば，存在の解釈としては，BHK 解釈のように，ある存在式が正しいと主張するためには，その場で即座に存在の証拠 $c \in D_w$ を取ってこなければならないということを要求している．

さて，ここでパラメータ $\bar{y}$ に注目しよう．論理式の解釈の帰納的定義にしたがって式を分解していく仮定で，$c \in D_w$ のようにパラメータが次々に選ばれているため，このように束縛されていないパラメータ $\bar{y}$ を考える必要がある．ところで，全称量化の解釈において，w 以降の世界を考える必要がある．しかし，世界 w の領域の元 $y_i \in D_w$ は，世界 $v \geqslant w$ の領域 D_v にも入っているだろうか．

ここでも様々なクリプキ意味論があり，定領域フレーム，拡大領域フレームなどを用いた意味論では，$w \leqslant v$ ならば $D_w \subseteq D_v$ であるという単調性を要求するので，ここに問題は起こらない．とはいえ，「変化する領域」という概念に様々な考え方がある．時間経過に従って，必ずしも領域が拡大していく必要があるだろうか．実際，クリプキ意味論には様々なバリエーションがあり，この単調性を要求しない意味論もある．そのうちの一つの意味論では，たとえ $D_w \nsubseteq D_v$ であったとしても，元の世界 w にあった元 $y \in D_w$ が，後の世界 v で消失することはなく，姿を変えて，領域 D_v に残っていることを要求する．世界が $w \leqslant v$ と進行したとき，かつて入っていた元 $y \in D_w$ の世界 v における姿を $y|_v$ と書くことにしよう．このような条件があれば，領域の単調性がなくとも，論理式を解釈することができる．

4. $w \Vdash (\varphi \to \psi)(y) \iff (\forall v \geqslant w)\ [v \Vdash \varphi(y|_v) \implies v \Vdash \psi(y|_v)]$.
5. $w \Vdash \exists x\varphi(x,y) \iff (\exists c \in D_w)\ w \Vdash \varphi(c,y)$.
6. $w \Vdash \forall x\varphi(x,y) \iff (\forall v \geqslant w)(\forall c \in D_v)\ [v \Vdash \varphi(c,y|_v)]$.

ともあれ，直観主義述語論理のモデルを作るにあたって重要な考え方の一つは，変化する領域 $(D_w)_{w \in W}$ の概念である．

10.3. 半順序上の前層

10.3.1 変化する集合

変化する領域，あるいは一般に，変化する集合 (varying set) の概念について考察しよう．先程は，世界 w 毎に指定された領域 D_w を考えたが，他の代表例として，時間変化する集合 A の概念がある．具体的には，各時刻 t において集合 A_t が指定される．時刻 s において A に属していた元 $x \in A_s$ は，後の時刻 $t \geqslant s$ において，別の元 $x|_t \in A_t$ に変化する．つまり，

記号 $x|_t$ によって，「x の時刻 t における姿」を表す．

この時間変化する集合 A について，元 $x \in A$ の時間変化において，過去の変化のデータは保存しないこととする．たとえば，時刻 s における異なる元 $x, y \in A_s$ が後の時刻 $t \geqslant s$ において同じ元 $z = x|_t = y|_t \in A_t$ に変化し得るが，「z に変化した元が過去は別物だった」という情報は記憶されない．つまり，「現在時刻 t において，それは z である」という情報しか残らない．したがって，t 以降の時刻での変化は，現在の姿 z のみに依存する．特に，$x|_t = y|_t$ になった時点で，後の時刻 $u \geqslant t$ においては，$x|_u = y|_u$ となる．この性質は，つまり，時刻 s の元 x の時刻 $t \geqslant s$ での変化結果 $x \mapsto x|_t$ が A_s から A_t への写像になっているということである．

$$x \mapsto x|_t \colon A_s \to A_t.$$

もう少しこの概念の分析を進めよう．時刻 s における x の値が時刻 $t \geqslant s$ において $x|_t = y$ であったとし，この y が後の時刻 $u \geqslant t$ において $y|_u = z$ であったとする．しかし，y は x の変化した姿であるから，x の時刻 u における値が z であるとも言える．つまり，$x|_u = z$ である．まとめると，$(x|_t)|_u = x|_u$ という性質が成り立つ．

$$x \in A_s \text{ and } s \leqslant t \leqslant u \implies (x|_t)|_u = x|_u.$$

これが時間変化する集合の概念である．先程のクリプキ意味論のときと同様に，より一般的な変化する集合の概念を考えるときは，時間のような線形性を仮定しない．たとえば，時間だけでなく周囲の環境など，様々な要因に絡んで，姿を変える集合もあり得る．時間変化と同様に，環境 p から環境 q への遷移を $q \leqslant p$ と書くことにしよう．ただし，時刻 s から時刻 t への遷移は，$s \leqslant t$ のときのみに行われたが，今後の都合上，環境の遷移においては，順序を反転させている．この設定の下では，環境の集合 P は半順序をなす．変化する集合 A とは，各環境 p において集合 A_p が指定され，環境 p における元 $x \in A_p$ の遷移先の環境 q における値 $x|_q \in A_q$ が定められているようなものである．また，先程と同様に，元 x が「どういう環境を辿ってきたか」という情報は記憶されず，「現在の環境でこういう姿をしている」という情報しか残らない．まとめると，環境のなす半順序 P に沿って変化する集合の概念は，以下のように定式化できる．

定義 10.3. P が半順序集合であるとき，P 上の**前層** (*presheaf*) とは，添字付き集合族 $(A_p)_{p \in P}$ であり，$q \leqslant p$ ならば，各 $x \in A_p$ に対して，$x|_q \in A_q$ が定義されており，以下の条件を満たすものである．

(1) $x \in A_p$ について，$x|_p = x$ である．
(2) $x \in A_p$ かつ $r \leqslant q \leqslant p$ ならば，$(x|_q)|_r = x|_r$ である．

注意. 各 $q \leqslant p$ に対して，写像 $A_{q \leqslant p} \colon A_p \to A_q$ を $A_{q \leqslant p}(x) = x|_q$ と定義すれば，前層の定義の条件は以下の条件を満たすものと言い直せる．

$$A_{p \leqslant p} = \mathrm{id}, \qquad\qquad A_{r \leqslant q} \circ A_{q \leqslant p} = A_{r \leqslant p}$$

圏の用語を用いれば，つまり，P 上の前層とは，P^{op} から $\mathbf{Set}$ への**関手** (*functor*) である．

例 10.4. 上で述べた《時間変化する集合》とは，ω^{op} 上の前層に他ならない．

例 10.5. 離散順序 I 上の前層は，ただの（添字付き）集合族 $(A_i)_{i \in I}$ である．

例 10.6. 集合 X, Y を固定する．各 $A \subseteq X$ に対して，F_A を A から Y への写像全体の集合と定義する．このとき，$f \in F_A$ と $B \subseteq A$ に対して $f|_B$ を f の定義域 B への制限である．この $(F_A)_{A \subseteq X}$ は冪集合 $\mathfrak{P}(X)$ 上の前層をなす．ここで，$\mathfrak{P}(X)$ には包含関係で順序を入れている．

例 10.7 (バンドル)**.** 位相空間 Z 上の**バンドル** (*bundle*) とは，連続写像 $\pi \colon A \to Z$ である．開集合 $U \subseteq Z$ に対して，U 上の π の**セクション** (*section*) とは，$\pi \circ s = \mathrm{id}$ となる連続写像 $s \colon U \to A$ である．このとき，A_U を U 上の π のセクション全体と定義し，$s \in A_U$ と $V \subseteq U$ に対して $s|_V$ を s の定義域 V への制限として定義する．これは $\mathcal{O}(Z)$ 上の前層をなす．

10.3.2 前層の射

上記の例のように，前層には様々な側面があるが，本稿では，前層とは変化する集合である，という観点を貫くものとする．集合があるところには関数の概念がある．そうすると，変化する集合のあるところには変化

する関数の概念がありそうである．たとえば，環境 p における関数 $f_p\colon A_p \to B_p$ について，環境 p が環境 q に変化したとき，それに応じて f_p が別の関数 $f_q\colon A_q \to B_q$ に変化する，といった状況が考えられる．このアイデアを基に，半順序 P 上の前層の間の射の概念を導入する．

定義 10.8. 前層 A から B への射 $f\colon A \to B$ とは，写像の族 $(f_p\colon A_p \to B_p)_{p\in P}$ であり，次を満たすものである．

$$(a \in A_p \text{ and } q \leqslant p) \implies f_p(a)|_q = f_q(a|_q).$$

つまり，a に f を適用してから環境 q に遷移した後の値と，a の環境 q への遷移後の値に f を適用したものが一致する，というものである．このように環境遷移による値の変化と関数適用の順序交換が成立する，というものが射の条件である．言い換えれば，任意の $q \leqslant p$ に対して，以下の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd}
A_p \arrow[r, "f_p"] \arrow[d, "A_{q\leqslant p}"'] & B_p \arrow[d, "B_{q\leqslant p}"] \\
A_q \arrow[r, "f_q"'] & B_q
\end{tikzcd}$$

射 $f = (f_p)_{p\in P}$ と $g = (g_p)_{p\in P}$ の合成は，環境毎の合成 $g \circ f = (g_p \circ f_p)_{p\in P}$ によって与えられる．

注意. 圏の言葉を知っている人に言えば，前層は関手であり，前層の射は**自然変換** (*natural transformation*) である．

例 10.9. 離散順序 I 上の前層 $(A_i)_{i\in I}$ と $(B_i)_{i\in I}$ の間の射は，ただの写像族 $(f_i\colon A_i \to B_i)_{i\in I}$ である．

半順序 P が固定されているとき，各 $p \in P$ に対して，単元集合 $1_p = \{\bullet\}$ を考える．また，$\bullet|_p = \bullet$ と定義する．これによって定義される前層を**終対象** (*terminal object*) と呼び，$\mathbf{1}$ と書く．P 上の前層 A に対して，射 $\mathbf{1} \to A$ を**大域元** (*global element*) と呼ぶ．大域元 $x\colon \mathbf{1} \to A$ とそれによって指定される値 $\dot{x} = (x_p(\bullet))_{p\in P}$ をしばしば同一視する．

例 10.10 (集合の大域元)**.** 単元集合 $\{\bullet\}$ 上の前層とは，ただの集合のことである．このとき，終対象は単元集合 $\{\bullet\}$ であり，集合 A の大域元とは，A から元をひとつ選ぶ写像，あるいは元 $x \in A$ のことである．

例 10.11 (集合族の大域元)**.** 離散順序 I 上の前層とは，ただの集合族のことであった．このとき，終対象は単元集合 $\{\bullet\}$ だけからなる集合族であり，集合族 $(A_i)_{i\in I}$ の大域元とは，各 A_i から元をひとつずつ選ぶ写像，あるいは元 $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ のことである．

例 10.12 (変化する集合の大域元)**.** 半順序 P 上の前層 A の大域元とは，元 $(x_p)_{p\in P} \in \prod_{p\in P} A_p$ であり，任意の $q \leqslant p$ に対して $x_q = x_p|_q$ という条件を満たすものである．つまり，P 上の前層の大域元とは，変化する集合 A のある元の変化の行程を与えるものである．たとえば，$P = \omega^{\mathrm{op}}$ であれば，A の大域元 $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ は，初期時刻 0 において x_0 だった元の時刻 t における値が x_t になることを表す．

大域元はすべての環境で存在している元（の行程／軌道）である．一方，すべての元がすべての環境で存在しているとは限らない．たとえば，ある時刻以降で誕生する元などは大域元ではない．具体的には，時間変化する集合，つまり ω^{op} 上の前層 $(A_n)_{n\in\omega}$ において，$*|_{n+1}\colon A_n \to A_{n+1}$ が全射でなかったとしよう．このとき，時刻 n には存在しなかったが，時刻 $n+1$ で存在する，つまり時刻 $n+1$ で誕生した元が存在する．このような元は大域元ではなく，部分元と呼ばれる．これを形式的に導入するために，いくつかの概念を導入する．

定義 10.13. まず P 上の前層 A, B の間の射 $f\colon A \to B$ が**モノ** (*mono*) であるとは，任意の $p \in P$ に対して，$f_p\colon A_p \to B_p$ が単射であることを指す．モノ射は，$m\colon A \rightarrowtail B$ のような記号で表される．モノ射 $m\colon A \rightarrowtail B$ のことを B の**部分対象** (*subobject*) と呼ぶ．

部分対象 m は，しばしばその始域 $(A_p)_{p\in P}$ と同一視される．集合族あるいは P 上の前層の場合には，像 $(m[A_p])_{p\in P}$ を考えると B_p の部分集合族として取り扱える．したがって，この同一視の下では，

- 前層 B の部分対象とは，任意の $p \in P$ に対して $A_p \subseteq B_p$ となる前層 A

のことを指すと考えてもよい．言い換えれば，集合として $A_p \subseteq B_p$ であって，$x \in A_p$ かつ $q \leqslant p$ ならば $x|_q \in A_q$ となるものである．ここで，制限は B のものを引き継ぐ．この意味での部分対象を考えている場合には，$A \subseteq B$ と書くことにする．

例 10.14 (**1** の部分対象)**.** 前層 A が **1** の部分対象であるとき，各成分 A_p は空集合または一点集合である．もし A_p が一点集合 $\{x\}$ ならば，後の環境 $q \leqslant p$ での値 $x|_q$ が存在しているから，$A_q = \{x|_q\}$ である．よって，A が **1** の部分対象であるとは，ある下方集合[*28]$Q \subseteq P$ が存在して，以下のようになっていることである．

$$A_p \simeq \begin{cases} \{\bullet\} & \text{if } p \in Q, \\ \varnothing & \text{if } p \notin Q. \end{cases}$$

つまり，P 上の前層の終対象 **1** とは一点集合からなる集合族だったが，その部分対象として，一点集合と空集合たちからなる集合族が該当する．

半順序 P 上の前層 A に対して，**1** の部分対象 $S \rightarrowtail \mathbf{1}$ からの射 $x\colon S \to A$ のことを**部分元** (*partial element*) と呼ぶ．言い換えれば，部分元とは，下方集合 $Q \subseteq P$ で添字付けられた族 $(x_p)_{p\in Q} \in \prod_{p\in Q} A_p$ であり，任意の $q \leqslant p \in Q$ に対して，$x_q = (x_p)|_q$ となるもののことである．大域元では，途中から誕生する元を捉えられないが，部分元まで考えることで，前層に関しては，あらゆる “元” のパターンを網羅することができる．

注意. 半順序 P 上の前層 A, B に対して，写像族 $f = (f_p\colon A_p \to B_p)_{p\in P}$ が射であることと，f が A の部分元 $x = (x_p)_{p\in Q}$ を B の部分元 $f(x) := (f_p(x_p))_{p\in Q}$ に移すことは同値である．前者から後者は自明に導かれ，後者から前者については，部分元の性質より，$f_p(x_p)|_q = f_q(x_q) = f_q(x_p|_q)$ となることから，射の条件を満たす．実際，$Q = {\downarrow}p$ の形の下方集合のみ考えれば十分である．このような，部分元によって射を識別できるという性質は，弱い外延性 (weak extensionality) であると考えることもできる．

10.4. クリプキ前層意味論

われわれは半順序 P 上の前層という，《変化する集合》を取り扱ってきたが，これを利用すると，《変化する構造》の概念も導入できる．われわれが変化する集合の概念を取り扱いたかった理由は，直観主義述語論理の意味論のためであった．述語論理においては，ただ量化記号の解釈ができればいいというわけではなく，関数記号や関係記号の解釈が必要である．たとえば，何かの演算 $*$ や順序 $\leqslant$ などを扱っているとき，その意味を与える必要があり，その解釈を行うものが，構造の概念である．演算 $*$ のようなものは関数記号と呼ばれ，順序 $\leqslant$ のようなものは関係記号と呼ばれる．

[*28] 半順序集合 P の部分集合 $A \subseteq P$ に対して，下方閉包 ${\downarrow}A$ を ${\downarrow}A = \{p \in P : (\exists a \in A)\ p \leqslant a\}$ と定義する．$A = \{a\}$ の場合は，${\downarrow}A$ のことを ${\downarrow}a$ と略記する．$A \subseteq P$ が**下方集合** (*down set*) であるとは，$A = {\downarrow}A$ であることを意味する．

定義 10.15 (古典論理における構造)**. 言語** (*language*) とは, 集合 $\mathcal{L}_{fun}$ と $\mathcal{L}_{rel}$ および関数 $\alpha\colon \mathcal{L}_{fun}\cup\mathcal{L}_{rel} \to \mathbb{N}$ の組である．集合 $\mathcal{L}_{fun}$ の元を関数記号 (function symbol) と呼び，$\mathcal{L}_{rel}$ の元を関係記号 (relation symbol) と呼ぶ．各記号 $s \in \mathcal{L}_{fun} \cup \mathcal{L}_{rel}$ に対して，$\alpha(s)$ は s の項数 (arity) と呼ばれる．項数 0 の関数記号は，しばしば定数記号 (constant symbol) と呼ばれる．

つまり，言語とは，関数記号および関係記号の集合および，各記号への項数の割り当ての組である．述語論理において，構造とは，たとえば，群，環，体，半順序，全順序などを包括する概念である．古典述語論理の場合には，構造とは，《変化しない領域》上で各記号の解釈を与えるものである．

定義 10.16. 言語 $\mathcal{L}$ に対して，**$\mathcal{L}$-構造** ($\mathcal{L}$-*structure*) とは，集合 A と各記号 $s \in \mathcal{L}$ の解釈 s^M からなる組 $M = (A, s^M)$ である．

(1) c が定数記号ならば，$c^M \in A$ である．
(2) f が n 項関数記号ならば，$f^M\colon A^n \to A$ である．
(3) R が n 項関係記号ならば，$R^M \subseteq A^n$ である．

例 10.17. 群は単独の 2 項関数記号 $*$ からなる言語における構造であり，環は 2 つの 2 項関数記号 $\{+, \times\}$ からなる言語における構造である．同様に，半順序は単独の 2 項関係記号 $\leqslant$ からなる言語における構造である．

さて，これはあくまで古典 $\mathcal{L}$-構造である．我々がこれから扱うものは，直観主義述語論理を解釈するための変化する構造の概念である．《変化する構造》のアイデアは，各環境 p 毎に古典的な意味での構造を指定することである．ただし，これらの構造は，環境の遷移による元の変化と整合的でなければならない．これについて，以下のように形式的に定義できる．

定義 10.18. 言語 $\mathcal{L}$ に対して，半順序 P 上の **$\mathcal{L}$-構造** ($\mathcal{L}$-*structure*) とは，以下の要素から構成される．

(1) 各環境 $p \in P$ において，古典 $\mathcal{L}$-構造 $M_p = (A_p, c_p^M, f_p^M, R_p^M)$ が割り当てられている．
(2) $A = (A_p)_{p\in P}$ は前層をなす．特に，写像 $x \mapsto x|_q\colon A_p \to A_q$ が指定されている．
(3) 環境 p における定数記号 c の解釈の，後の環境 $q \leqslant p$ での値は，環境 q における c の解釈の値と等しい．つまり，$c_p^M|_q = c_q^M$ が成り立つ．
(4) 同様に，各環境 p における関数記号 f の解釈 f_p^M も環境の遷移と整合的である．

$$q \leqslant p \implies (\forall x \in A_p)\ \left[f_p^M(x)|_q = f_q^M(x|_q)\right].$$

(5) 各環境 p における関係記号 R の解釈 R_p^M について，以下の単調性が成立する．

$$q \leqslant p \implies (\forall x \in A_p)\ \left[x \in R_p^M \implies x|_q \in R_q^M\right].$$

半順序 P 上の $\mathcal{L}$-構造を**クリプキ前層構造** (*Kripke presheaf structure*) と呼ぶことにする[*29]．さて，上記の $\mathcal{L}$-構造（クリプキ前層構造）の定義は，少しアドホックな定義に見えるかもしれない．しかし，実を言えば，

[*29] 第 10.2 節で述べた直観主義クリプキ意味論の解説とは世界上の順序の向きが異なっているが，本質的ではないので，順序を反転させて考えても構わない．また，本稿の定義でのクリプキ前層構造のことをクリプキ層意味論 (Kripke sheaf semantics) と呼ぶ文献も多い．

これは極めて一般的な定義を前層に適用したものであり，その背後にある定義は汎用性の高いものである．具体的には，M が P 上の $\mathcal{L}$-構造であるということを，以下のようにすっきりと言い換えることができる．

定義 10.19. 言語 $\mathcal{L}$ に対して，半順序 P 上の **$\mathcal{L}$-構造** ($\mathcal{L}$-*structure*) とは，以下からなる組 $M = (A; c^M, f^M, R^M)_{c,f,R\in\mathcal{L}}$ である．

(1) A は P 上の前層である．
(2) 各定数記号 $c \in \mathcal{L}$ に対して，大域元 $c^M : \mathbf{1} \to A$ が割り当てられている．
(3) 各 n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対して，射 $f^M : A^n \to A$ が割り当てられている．
(4) 各 n 変数関係記号 $R \in \mathcal{L}$ に対して，部分対象 $R^M \rightarrowtail A^n$ が割り当てられている．

このように言い換えると，このアイデアは，前層だけでなく，あらゆる圏に対して適用できることが予期できるであろう．つまり，圏における構造という一般的なアイデアが背後にあり，それを P 上の前層に適用したものが，クリプキ前層意味論である．

半順序 P 上の $\mathcal{L}$-構造における論理式の真偽を定義しよう．クリプキ・モデルにおいては，世界 p 毎の真偽がまず定義され，世界 p において構造 M 上で論理式 φ が真であることを $M \models_p \varphi$ あるいは $M \models p \Vdash \varphi$ と書く．形式的には，以下のように定義する．

(1) φ が原子論理式ならば，$M \models_p \varphi$ とは，通常の古典論理の意味で $M_p \models \varphi$ であることを指す．
(2) $\wedge, \vee, \exists$ については，各世界毎に古典構造と同様の定義を与える．
(3) $M \models_p \neg\varphi(x)$ とは，任意の $q \leqslant p$ に対して $M \not\models_q \varphi(x|_q)$ であることを指す．
(4) $M \models_p \varphi(x) \to \psi(x)$ とは，任意の $q \leqslant p$ に対して $M \models_q \varphi(x|_q)$ ならば $M \models_q \psi(x|_q)$ であることを指す．
(5) $M \models_p \forall x\varphi(x, y)$ とは，任意の $q \leqslant p$ および任意の $a \in A_q$ に対して $M \models_q \varphi(a, y|_q)$ であることを指す．

この定義についても，より一般的な構成が背後にあるが，現時点では一般的な定義は不要であるから，ここでは詳細は説明しない．任意の世界 $p \in P$ において $M \models_p \varphi$ であるとき，$M \models \varphi$ と書く．もし論理式 φ が自由変数を含むならば，φ を満たすような（変化する）元全体の集合

$$\mathsf{Sat}_p^M(\varphi) := \{\bar{x} \in A_p^n : M \models_p \varphi(\bar{x})\}$$

を考えると，$\mathsf{Sat}^M(\varphi) = (\mathsf{Sat}_p^M(\varphi))_{p\in P}$ は A^n の部分対象となる．これはどんな値を代入したときに φ が真になるか否かを議論しているものと思える．たとえば，P が時間直線の場合には，$\mathsf{Sat}^M(\varphi)$ の大域元は，φ が全ての時刻で真であるような軌道であり，部分元であれば，ある時刻の後ではずっと真であるような半軌道である．

■論理式の真理値の度合い: いま，「$\varphi(x)$ が真であるか否か」について議論したが，より詳細に，「$\varphi(x)$ がどれくらい真か」ということにも興味がある．この $\varphi(x)$ の真理度を分析するための素朴なアイデアは「$\varphi(x)$ がどのくらいの多くの地点で真か」を議論することである．たとえば，

- x が全ての地点で φ を満たすならば，$\varphi(x)$ は完全に真であると言ってよいだろう．
- x が全ての地点で φ を満たさないならば，$\varphi(x)$ は完全に偽であると言ってよいだろう．

- x が途中の地点までは φ を満たさないが，途中以降は φ を満たすならば，$\varphi(x)$ は中間的な真理値を持つと言ってよいだろう．

簡単のために φ が 1 変数論理式であるとすれば，形式的には，$\{p \in P : M \models_p \varphi(x|_p)\}$ が $\varphi(x)$ が真である世界全体であり，これがどれくらい大きいかによって $\varphi(x)$ の真理値の度合いを表していると考えられる．ただ，一般的には，世界全体を俯瞰的に見渡すのは難しく，「ある地点以降」を見た方が適切な場合もある．たとえば，前層 $A = (A_p)_{p\in P}$ は一般には大域元 x を持たないので，地点 p での元 $x \in A_p$ を議論する方が容易であるが，この元の振る舞いは地点 p 以降のものしか分からない．したがって，地点 p における領域の元 $x \in A_p$ に対して，地点 p 以降で $\varphi(x)$ が真である世界全体を考えよう．

$$[\![\varphi]\!]_p^M(x) := \{q \leqslant p : M \models_q \varphi(x|_q)\}.$$

上で述べたクリプキ前層意味論の性質より，この $\varphi(x)$ が真であるような地点全体は P の下方集合である．正確には，地点 p 以降を見ているので，$\downarrow p$ の下方集合である．ここで，$\downarrow p$ は地点 p 以降の地点全体 $\{q \in P : q \leqslant p\}$ である．もし $[\![\varphi]\!]_p^M(x) = \downarrow p$ であれば，$\varphi(x)$ は地点 p で真であると言える．いま，$\downarrow p$ の下方集合全体を Ω_p と書くことにすれば，$[\![\varphi]\!]_p^M$ は A_p^n から Ω_p への写像である．

$$[\![\varphi]\!]_p^M \colon A_p^n \to \Omega_p = \{S \subseteq \downarrow p : S \text{ は下方集合 }\}.$$

これによって写像の族 $([\![\varphi]\!]_p^M \colon A_p \to \Omega_p)_{p\in P}$ を得られる．写像の族と言えば，前層の射のように見えるが，その前に，そもそも $\Omega = (\Omega_p)_{p\in P}$ は前層であると言えるであろうか．この Ω が前層であるためには，各 $S \in \Omega_p$ の後の地点 $q \leqslant p$ での状態 $S|_q$ が指定されていなければならない．しかし，S はたとえば何らかの条件を満たすような p 以降の地点全体のようなものだったから，環境が p から q に遷移したならば，もう環境 q 以降を考えればよいから，$S|_q$ は S を環境 q 以降に制限したものとすればよい．

定義 10.20. 下方集合の族 $\Omega = (\Omega_p)_{p\in P}$ は，各 $S \in \Omega_p$ および $q \leqslant p$ に対して，遷移関係が以下のように定義された前層である．

$$S|_q = S \cap \downarrow q = \{r \in S : r \leqslant q\}$$

そうすると，$[\![\varphi]\!]^M = ([\![\varphi]\!]_p^M \colon A_p \to \Omega_p)_{p\in P}$ が前層 A から前層 Ω への射になっているかどうかということも議論できる．つまり，$q \leqslant p$ のときに $[\![\varphi]\!]_q^M(x|_q) = [\![\varphi]\!]_p^M(x) \cap \downarrow q$ になっていればよいが，これは論理式の複雑さ上の帰納法によって証明できる．しかし，これは本題とは逸れる細部なので省略しよう．

このようにして，一般に，φ が n 変数論理式であるとき，その真理値を割り当てる射

$$[\![\varphi]\!]^M \colon A^n \to \Omega$$

を得ることができた．つまり，これからは，Ω は真理値全体のなす（変化する）集合であると考える．たとえば，$\downarrow p \in \Omega_p$ は「地点 p において真」であることを表す．したがって，$\top_p = \downarrow p$ と定義すれば，$\top = (\top_p)_{p\in P}$ は「真」を表す大域元 $\top \colon \mathbf{1} \to \Omega$ である．

■部分対象と特性射: さて，ここまでに，構造における論理式 φ の真偽性に関する 2 つの概念を見た．

- 地点 p で論理式 φ を満たす元全体の集合 $\mathsf{Sat}_p^M(\varphi) \subseteq A_p^n$.
- 元 $\bar{x}$ が論理式 φ を満たす地点全体を与える写像 $[\![\varphi]\!]_p^M \colon A_p^n \to \Omega_p$.

ところで，前者は部分対象 $\mathsf{Sat}^M(\varphi) \rightarrowtail A^n$ を与え，後者は前層の射 $[\![\varphi]\!]^M \colon A^n \to \Omega$ を与える．この 2 つは，いわゆる部分集合 $S \subseteq A$ と特性関数 $\chi_S \colon A \to \{0,1\}$ の関係に類似している．ここで，**特性関数**

(*characteristic function*) とは，$x \in S$ であることと $\chi_S(x) = 1$ であることが同値であるような関数である．図式的に書けば，以下のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[rrd, bend left, "t \mapsto *"] \arrow[rd, dotted, "x'"] \arrow[rdd, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r, "s \mapsto *"] \arrow[d, tail, "\mathrm{id}"'] & \{*\} \arrow[d, "* \mapsto 1"] \\
& A \arrow[r, "\chi_S"'] & \{0,1\}
\end{tikzcd}
$$

図式の意味: (右下の四角形) の可換性が成り立ち，もし (外枠の四角形) の可換性も成立するならば，(2 つの三角形) の可換性を成り立たせるような点線が存在する．

(右下の四角形) S からの半時計回りは $x \mapsto x \mapsto \chi_S(x)$, 時計回りは $x \mapsto * \mapsto 1$ であるから「$x \in S$ ならば $\chi_S(x) = 1$」を意味する．
(外枠の四角形) 同様に「$t \in T$ ならば $\chi_S(x(t)) = 1$」を意味する．
(左下の三角形) 「$x(t) = x'(t) \in S$」を意味する．

よって，(外枠)⇒(左下) は「$\chi_S(x(t)) = 1$ ならば $x(t) \in S$」を意味するため，これらを合わせると，上の図式が，$\chi_S \colon A \to \{0,1\}$ が $S \subseteq A$ の特性関数であることを表していることが分かる．

より一般に，部分対象 $S \rightarrowtail A$ に対して，以下の左の図式を満たす射 $\chi_S \colon A \to \Omega$ を S の特性射と呼ぶ．

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[rrd, bend left] \arrow[rd, dotted] \arrow[rdd, bend right, "x"'] & & \\
& S \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
& A \arrow[r, "\chi_S"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[rrd, bend left] \arrow[rd, dotted] \arrow[rdd, bend right, "\bar{x}"'] & & \\
& \mathsf{Sat}^M(\varphi) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\
& A^n \arrow[r, "\llbracket\varphi\rrbracket^M"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

実際，右の図式ように，射 $\llbracket\varphi\rrbracket^M \colon A^n \to \Omega$ が部分対象 $\mathsf{Sat}^M(\varphi) \rightarrowtail A^n$ の特性射になっていることを確認できる．また，任意の $S \rightarrowtail A$ に対して特性射 χ_S が存在するとき，対応する射 $\top \colon \mathbf{1} \to \Omega$ を**部分対象分類子** (*subobject classifier*) と呼ぶ．この部分対象分類子の存在が，トポスに要求される条件の一つである．これはつまり，トポスにおいては，真理値のような概念を取り扱うことができることを保証するものである．通常の数学の世界では，真理値は $\{0,1\}$ からなる 2 値論理であるが，前層の世界では，真理値は Ω という徐々に制限されていく下方集合たちからなる．トポスとして要求される性質は他にも色々とあるが，実際に，前層の圏がトポスになることを示すことができる．

§11. ハイティング値集合論

11.1. ハイティング代数

ここまででクリプキ前層意味論，すなわち「変化する集合」の理論を展開した．ここから我々が観測するものは，この「変化する集合」と「ハイティング代数値集合」と呼ばれるもののある種の対応関係である．

$$\text{「変化する集合」} \quad \approx \quad \text{「ハイティング代数値集合」}$$

ハイティング代数とは何かということを説明するために，一旦，直観主義論理の話に少しだけ戻ろう．直観主義論理に対する最初期の貢献としては，ブラウワーの弟子ハイティングによるものがある．ブラウワーの直観主義には形式的な定義がなかったが，直観主義論理の形式化のために，1930 年頃にハイティングが導入したものが，現在ハイティング代数として知られる，ある種の順序構造である．大雑把に言えば，ハイティング

値代数とは，直観主義論理における真理値の構造を記述するための代数である．たとえば，クリプキ前層意味論においては，論理式 $\varphi(x)$ が与えられているとき，$\varphi(x)$ の満たす地点全体のなす下方集合 $[\![\varphi]\!]_p^M(x)$ を $\varphi(x)$ の真理値だと考えられるのであった．この真理値の構造を見ると，ハイティング代数と呼ばれる構造が浮かび上がり，変化する集合の理論とハイティング代数値集合論が結び付いていく．

それでは，ハイティング代数の定義を与えるための準備をしよう．いま，Q は半順序集合であるとする．二元 $p, q \in Q$ の上限（最小上界）が存在するとき，それを $p \vee q$ と書き，下限（最大下界）が存在するとき，それを $p \wedge q$ と書く．任意の二元 p, q が上限 $p \vee q$ と下限 $p \wedge q$ を持つような半順序を**束** (*lattice*) と呼ぶ．一般に，$\{p_i\}_{i\in I}$ の上限 $\bigvee_{i\in I} p_i$ と下限 $\bigwedge_{i\in I} p_i$ を持つような半順序は**完備束** (*complete lattice*) と呼ばれる．最大元と最小元を持つ束は**有界束** (*bounded lattice*) と呼ばれる．完備束は有界束である．束 L 上の二項演算 $\twoheadrightarrow : L^2 \to L$ が**ハイティング含意** (*Heyting implication*) であるとは，次の条件（随伴性）を満たすことである．

$$x \wedge y \leqslant z \iff x \leqslant y \twoheadrightarrow z$$

ハイティング含意を持つような有界束は，**ハイティング代数** (*Heyting algebra*) と呼ばれる．直感的には，ハイティング代数は，ある意味で論理学を解釈できるような半順序である．

$\wedge$:「かつ」　$\vee$:「または」　$\twoheadrightarrow$:「ならば」　最大元:「真」　最小元:「偽」

最大元を $\top$, 最小元を $\bot$ と書けば，否定を $\neg x = (x \twoheadrightarrow \bot)$ と定義することもできる．また，$x \leqslant y$ は，命題 X から命題 Y を導ける，と理解できる．したがって，ハイティング含意の条件を論理学の言葉で述べれば，

『X かつ Y を仮定して Z を導ける』 $\iff$ 『X を仮定して $Y \to Z$ を導ける』

という同値性を意味するものだと考えることができる．ハイティング含意は随伴性を満たすものとして定義されているが，具体的には，以下のように書き表すこともできる．

$$(y \twoheadrightarrow z) = \max\{x \in L : x \wedge y \leqslant z\}.$$

この性質をハイティング含意の定義することも多い．ともあれ，このようにある種の束構造は，論理学を解釈するために用いることができる．実際，たとえばブール代数は古典論理の真理値代数であり，ハイティング代数は直観主義論理の真理値代数として扱われる．

それでは，クリプキ前層意味論における地点 p における真理値全体 Ω_p がハイティング代数をなすことを確認しよう．ここで，Ω_p は $\downarrow p$ の下方集合全体の族であったことを思い出そう．より一般的に，P を半順序としたとき，$\mathcal{O}(P)$ を P の下方集合全体の族とすると，包含関係によって再び半順序 $(\mathcal{O}(P), \subseteq)$ となる．

命題 11.1. 任意の半順序 P に対して，$(\mathcal{O}(P), \subseteq)$ は完備ハイティング代数をなす．

Proof. まず，この半順序の最大元は $\mathcal{O}(P)$ であり，最小元は $\varnothing$ である．基本的な束演算について，任意上限 $\bigvee : \mathcal{O}(P)^I \to \mathcal{O}(P)$ と下限 $\bigwedge : \mathcal{O}(P)^I \to \mathcal{O}(P)$ については以下によって与えられる．

$$\bigvee_{i\in I} c_i := \bigcup_{i\in I} c_i, \qquad \bigwedge_{i\in I} c_i := \bigcap_{i\in I} c_i.$$

ここで，下方集合の無限共通部分は下方集合になる，ということに注意しよう．つづいて，ハイティング含意 $\twoheadrightarrow : \mathcal{O}(P)^2 \to \mathcal{O}(P)$ については次のように定義できる．

$$c \twoheadrightarrow d := \{p \in P : c \cap (\downarrow p) \subseteq d\}.$$

これがハイティング演算であることを確認すると，

$$a \subseteq (c \twoheadrightarrow d) \iff (\forall p \in a)\ c \cap (\downarrow p) \subseteq d \iff c \cap (\downarrow a) \subseteq d \iff c \cap a \subseteq d$$

となる．したがって，$(\mathcal{O}(P), \subseteq)$ は完備ハイティング代数をなす． □

類似のアイデアを用いて，任意の位相空間 X に対して，開集合全体のなす半順序 $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ は完備ハイティング代数をなすことを示すことができる．ただし，一般には開集合の無限共通部分は開集合になるとは限らないため，任意下限の定義では内部 (interior) を考える必要があるなど，多少の修正がいることには注意する．命題 11.1 の位相的側面について説明しておくと，半順序 P が与えられたとき，下方集合を開集合とする位相は，**アレクサンドロフ位相** (*Alexsandrov topology*) と呼ばれる．下方集合族 $\mathcal{O}(P)$ の場合，命題 11.1 を証明する際に任意下限の定義で内部を取る必要が無かった理由について位相空間の言葉で説明しておくと，アレクサンドロフ位相特有の性質として，開集合の任意共通部分は開集合になるというものがあるからである．

■ファジー集合: 構造付き集合の一種にファジー集合というものがある．端的に言えば，帰属関係 $\in$ の曖昧さを表すための構造を付随した集合である．

定義 11.2 (ファジー集合)**.** 半順序 P が与えられているとする．P**-ファジー集合** (*fuzzy set*) とは，集合 $|X|$ と写像 $\mathbf{E}_X : |X| \to P$ の対 $X = (|X|, \mathbf{E}_X)$ を指す．各 $x \in |X|$ に対して，$\mathbf{E}_X(x) \in P$ を x の X への帰属度 (grade of membership) と呼ぶ．

通常は，P は最大元 1 と最小元 0 を持つと仮定し，このとき，$\mathbf{E}_X(x) = 0$ は「x は X に全く属さない」ことを意味し，$\mathbf{E}_X(x) = 1$ は「x は X に完全に属す」ことを意味する．しかし，ファジー集合においては，「全く属さない」と「完全に属す」の中間の帰属度があり得る．

明らかに，帰属度 $\mathbf{E}_X(x)$ は，$x \in X$ の真理値であると解釈することができそうだ．そうすると，たとえば，ハイティング代数値ファジー集合を考えることによって，直観主義論理の解釈を与えることができそうだという期待を持てる．前層意味論の場合には，論理式の真理値は下方集合として得られていたから，特に $\mathcal{O}(P)$-ファジー集合が重要な役割を持ちそうだ．

11.2. 定領域クリプキ意味論

クリプキ前層意味論に関して，先程はあまり触れなかったが，半順序上の構造 M における項の等式 $s = t$ の解釈もできるから，等式 $s = t$ の真理値が割り当てられる．クリプキ前層意味論においては，このように 2 つの項の間の「同値度」を議論できる．この特別な場合として，2 元の「同値度」に注目してみよう．具体的には，半順序 P 上の前層 $(A_p)_{p \in P}$ において，元 $x \in A_q$ と $y \in A_r$ について，「x と y がどれくらい等しいか」を考えることができる．たとえば，$x|_p = y|_p$ であれば，「元 x と元 y は環境 p 以降では一致する」あるいは「p の範囲で局所的に x と y は一致する」ということである．この一致範囲

$$\{p \in P : p \leqslant q \text{ and } p \leqslant r \text{ and } x|_p = y|_p\}.$$

は下方集合をなし，「x と y は等しい」という主張の真理値であると考えることができる．実際，x と y の同値度は，前層意味論の意味での $x = y$ の真理値となっており，つまり x と y が等しくなる地点全体の集合である．

ここで注目点として，上記の定義を採用するのであれば，元 x と y は互いに異なる環境（異なる世界の個体領域）のものでもよい，という点である．つまり，同値度を議論するにあたって，環境毎の領域 $(A_p)_{p\in P}$ を考える必要はなく，単独の個体領域 $|A| = \bigcup_{p\in P} A_p$ にまとめてしまっても問題なさそうである．すべての環境における領域が同じであるようなクリプキ意味論は，定領域 (constant domain) であると言われる．ここでは，一般的に，前層の定領域化について議論していこう．

■前層 → ファジー集合: 半順序 P 上の前層 $A = (A_p)_{p\in P}$ が与えられているとする．先程述べたように，各環境毎 p に集合 A_p があるというのもなかなか厄介なので，前層の元たちをひとつの台集合 $|A|$ の中で取り扱う，ということを考えよう．具体的には，台集合 $|A|$ は $(A_p)_{p\in P}$ の非交叉和として定義すればよい．

$$|A| = \sum_{p\in P} A_p = \bigcup_{p\in P}(\{p\} \times A_p).$$

必要ならば A_p と $\{p\} \times A_p$ を取り替えることにより，以後は，A_p と $\{p\} \times A_p$ を区別しないこととする．ただし，そうすると，元 $x \in |A|$ がどの環境に置かれていたかの情報が薄れてしまうので，x の属する環境を復元する写像 $\mathbf{E}_A\colon A \to P$ も準備しておく．

$$\mathbf{E}_A\colon |A| \to P; \qquad\qquad \mathbf{E}_A(x) = p \iff x \in A_p.$$

この $\mathbf{E}_A$ の構成のより一般的な考え方としては，集合族 $(A_p)_{p\in P}$ は $|A|$ の分割であるという見方をすることである．分割／彩色／ラベル付けの概念は，しばしば写像 $\mathbf{E}_A\colon |A| \to P$ の形で表される．

ともあれ, 前層 $(A_p)_{p\in P}$ のあるところに対 $(|A|, \mathbf{E}_A)$ がある．このような対 $(|A|, \mathbf{E}_A)$ は既に見たことがあるはずである．そう，P-ファジー集合である．逆に P-ファジー集合 $(|A|, \mathbf{E}_A)$ が与えられたとき，$A_p = \mathbf{E}_A^{-1}\{p\}$ と定義することによって，集合族 $(A_p)_{p\in P}$ を復元できる．以上より，P-添字付き集合族 $(A_p)_{p\in P}$ と P-ファジー集合 $(|A|, \mathbf{E}_A)$ の間には対応があることが分かった．

■等しさの真理値: それでは，P 上の前層と P-ファジー集合は本質的に同一のものであると考えてよいだろうか．というと，実はそうではない．前層とは，添字付き集合族という以上の情報を持っている．環境の変化に伴う各元の変化と，そして，その結果から得られる同値度の概念である．つまり，ファジー集合は「1 元の帰属度」の概念しか持たないが，前層は「2 元の同値度」の概念も持っている．具体的には，$x, y \in |A|$ について，

$$(x \sim y) := \left\{p \in P : p \leqslant \mathbf{E}_A(x) \text{ and } p \leqslant \mathbf{E}_A(y) \text{ and } x|_p = y|_p\right\}$$

が x と y の同値度であった．さて，この写像 $\sim\colon |A|^2 \to \mathcal{O}(P)$ はどのような性質を持っているだろうか．その答えとしては，以下の性質である．

- (対称律) $(x \sim y) = (y \sim x)$.
- (推移律) $(x \sim y) \cap (y \sim z) \subseteq (x \sim z)$.

対称律と推移律を満たす関係は**部分同値関係** (*partial equivalence relation*) と呼ばれるが，これはその $\mathcal{O}(P)$-値版であると考えられる．クリプキ意味論の文脈では，これは**等号付き直観主義クリプキ・フレーム**と呼ばれるものを定領域で表したものとなる．まとめると，$|A|$ 上の元の変化の方法が与えられていると，$|A|$ 上の元の「等しさの度合い」を定義することができる．下方集合たちは完備ハイティング代数をなすから，「等しさの度合い」は完備ハイティング代数の元である．

11.3. ハイティング値同値関係

上記のアイデアを一般化しよう．集合 X 上の n 項関係は，部分集合 $R \subseteq X^n$ であったが，これは関数 $R\colon X^n \to 2$ とみなすことができる．「同値性」はこのような 2 項関係の例であるが，上述の「等しさの度合い」は完備ハイティング代数に値を取る．集合 X と完備ハイティング代数 Ω に対して，X 上の Ω 値 n 項関係とは，写像 $R\colon X^n \to \Omega$ である．部分同値関係の Ω-値版は以下によって与えられる．

定義 11.3. Ω を完備ハイティング代数とする．集合 X 上の Ω **値部分同値関係** (Ω-*valued partial equivalence relation*) とは，次の条件を満たす Ω 値 2 項関係 $\sim\colon X^2 \to \Omega$ である．

(1) (対称律) $(x \sim y) = (y \sim x)$,
(2) (推移律) $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \leqslant (x \sim z)$.

集合 X と Ω 値部分同値関係の対 $(X, \sim)$ を **Ω-集合** (Ω-*set*) と呼ぶ．

Ω-集合 $(A, \sim)$ が与えられたとき，$x \in A$ の帰属度を $\mathbf{E}_A\colon A \to \Omega$ を $\mathbf{E}_A x := (x \sim x)$ によって定義し，$\mathbf{E}_A$ を**存在述語** (*existence predicate, extent*) と呼ぶ．以後，A が文脈から明らかな場合には，$\mathbf{E}_A$ は単に $\mathbf{E}$ と略記する．$\mathbf{E}x$ のことは元 x の集合 A への帰属度であると思ってもよい．この存在述語によって，任意の Ω-集合は，Ω-ファジー集合であると思うことができる．

> ただ単に，元の存在の度合い（帰属度）が定義されたものがファジー集合であったが，
> それだけでなく，等式の正しさの度合い（同値度）も定義されているものが Ω-集合である．

注意. 任意の Ω 値部分同値関係について，$(x \sim y) \leqslant (x \sim x)$ が成立する．なぜなら，対称律と推移律より，

$$(x \sim y) = (x \sim y) \wedge (y \sim x) \leqslant (x \sim x) \tag{11.1}$$

が成り立つからである．

例 11.4 (等号)**.** 自明な例として，任意の集合 X に対して，等号 $x = y$ は Ω 値部分同値関係とみなせる．ここで，$x = y$ ならば $(x = y) = \top$ とし，さもなくば $(x = y) = \bot$ と考える．よって，$(X, =)$ は Ω-集合であり，さらに，常に $\mathbf{E}x = \top$ が成立する．

例 11.5 (論理的同値)**.** 完備ハイティング代数 Ω 上の Ω 値 2 項関係 $\Leftrightarrow\colon \Omega^2 \to \Omega$ を

$$x \Leftrightarrow y \iff (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$$

で定義すれば，$\Leftrightarrow$ は Ω 値部分同値関係である．あまり同値らしくない部分同値関係としては，下限を Ω 値 2 項演算 $\wedge\colon \Omega^2 \to \Omega$ と見れば，$\wedge$ は Ω 上の Ω 値部分同値関係である．Ω-集合 $(\Omega, \Leftrightarrow)$ においては，常に $\mathbf{E}x = \top$ が成立する．一方，Ω-集合 $(\Omega, \wedge)$ においては，$x < \top$ ならば $\mathbf{E}x < \top$ である．

■前層 → Ω-集合: 以後，半順序 P に対して，$\Omega = \mathcal{O}(P)$ であるとする．先程，説明した，前層から Ω-集合の構成に F という名前を付けておくことにする．つまり，上記の構成をまとめると，前層 A が与えられたとき，Ω-集合 $\mathsf{F}A$ は以下によって与えられる．

$$|\mathsf{F}A| = \sum_{p \in P} A_p, \qquad (x \sim_{\mathsf{F}A} y) = \{p \in {\downarrow}\mathbf{E}x \cap {\downarrow}\mathbf{E}y : x|_p = y|_p\}$$

ここで，$A \subseteq P$ に対して，A が生成する下方集合を $\downarrow A$ と書く．つまり，$\downarrow A = \{q \in P : \exists p \in A.\, q \leqslant p\}$ である．それでは，実際にこれが Ω-集合になっていることを確認しておこう．

観察 11.6. A が P 上の前層ならば，$\mathsf{F}A$ は Ω-集合である．

Proof. まず，対称律は明らかである．推移律については，以下による．

$$(x \sim_{\mathsf{F}A} y) \wedge (y \sim_{\mathsf{F}A} z) = \{p \in \downarrow\mathbf{E}x \cap \downarrow\mathbf{E}y \cap \downarrow\mathbf{E}z : x|_p = y|_p = z|_p\} \subseteq (x \sim_{\mathsf{F}A} z).$$

よって，$\mathsf{F}A$ が Ω-集合であることが示された． □

■ **Ω-集合 → 前層:** それでは，逆に，Ω-集合から前層の情報を復元することはできるだろうか．その答えを言えば，もし $\Omega = \mathcal{O}(P)$ であれば，Ω-集合の情報から P 上の前層の情報を復元できる．具体的には，Ω-集合 $(A, \sim)$ が与えられたとき，まず，（通常の集合の意味での）同値関係の族 $(A_p, \sim_p)_{p\in P}$ を以下のように構成できる．

$$A_p = \{x \in A : p \in (x \sim x)\}, \qquad x \sim_p y \iff p \in (x \sim y).$$

このとき，$x \in A_p$ の $\sim_p$-同値類を $[x]_p$ と書くことにすれば，商集合は $A_p/{\sim_p} = \{[x]_p : x \in A_p\}$ によって得られる．商集合族 $(A_p/{\sim_p})_{p\in P}$ に対して，元の変化を $[x]_p|_q = [x]_q$ と定義すると，商集合族 $(A_p/{\sim_p})_{p\in P}$ が前層をなすことを確認できる．この構成を G と書くことにしよう．

$$(\mathsf{G}A)_p = A_p/{\sim_p}, \qquad (\mathsf{G}A)_{q\leqslant p} \colon [x]_p|_q = [x]_q$$

前層をなすことの証明のアイデアを述べると，同値度は下方集合なので，環境が変化するにつれて，台集合 A_p の元は増えていき，同値なものもどんどん増えていく．

$$p \geqslant q \implies [A_p \subseteq A_q \text{ and } {\sim_p} \subseteq {\sim_q}].$$

つまり，環境変化によって，新たな元が誕生したり，異なる元が等しくなったりする．これを利用すると，元の変化の定義が矛盾なく定義されており，前層をなすことを容易に示すことができる．

以上より，P 上の前層から Ω-集合の構成 F, および Ω-集合から P 上の前層の構成 G を得ることができた．

$$\mathsf{F} \colon [P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \to \Omega\text{-}\mathbf{Set}, \qquad \mathsf{G} \colon \Omega\text{-}\mathbf{Set} \to [P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$$

このとき，F と G は逆構成になっていると言えるだろうか．実際に計算してみると，逆構成に近い状況が成り立っていることは容易に分かる．たとえば，まず，次については容易に証明できる．

観察 11.7. P 上の任意の前層 A に対して，$\mathsf{GF}(A) \simeq A$ が成立する．

Proof. 前層 $A = (A_p)_{p\in P}$ が与えられているとしよう．$\mathsf{GF}(A)$ の構成をおさらいすると，まず Ω-集合 $(|\mathsf{F}A|, \sim_{\mathsf{F}A})$ が構成され，その後，同値関係の族 $(|\mathsf{F}A|_p, \sim_{\mathsf{F}A,p})_{p\in P}$ を得る．この具体的な記述を計算すると，

$$|\mathsf{F}A|_p = \{x \in |\mathsf{F}A| : p \in (x \sim_{\mathsf{F}A} x)\} = \sum_{q\geqslant p} A_q =: A_{\geqslant p}$$
$$x \sim_{\mathsf{F}(A),p} y \iff p \in (x \sim_{\mathsf{F}(A)} y) \iff x|_p = y|_p$$

となっている．その後，$\mathsf{GF}A$ はこれらによる商集合族となるが，上記の計算結果より，各同値類 $[x]_p \in \mathsf{GF}A_p$ は，以下の形になっている．

$$[x]_p = \{y \in A_{\geqslant p} : x|_p = y|_p\}$$

したがって，各 $x \in |A|$ に対して，$x|_p \in A_p$ と $[x]_p \in A'_p$ が一対一に対応し，$[x]_p|_q = [x]_q$ であることから，この変換は前層 A と A' の間の同型を与える．より正確には，$\eta_p \colon A_p \to \mathsf{GF}A_p$ を $\eta_p(x) = [x]_p$ によって定義すると，これは前層の射になっている．さらに，この逆射 $\eta_p^{-1}([x]_p) = x|_p$ は矛盾なく定義されており，$\eta_p \circ \eta_p^{-1} = \mathrm{id}$ かつ $\eta_p^{-1} \circ \eta_p = \mathrm{id}$ が成立している．したがって，A と $\mathsf{GF}A$ は前層として同型である． □

同じように，任意の Ω-集合 B に対して，$\mathsf{FG}(B) \simeq B$ であることを予期できる．しかし，ここでひとつ問題がある．我々はまだ Ω-集合の同型の概念を定義していない．それどころか，Ω-集合の射の概念さえ定義していない．射の定義によっては，$\mathsf{FG}(B) \simeq B$ となることもあるだろうし，ならないこともあるだろう．

Ω-集合上の射の概念としてどのようなものが適切かを考えるために，実際に，$\mathsf{FG}(B)$ がどうなっているかを計算してみると，以下のようになっている．

$$|\mathsf{FG}(B)| = \{(p, [x]_p) : p \in (x \sim_B x)\}, \qquad \big((p, [x]_p) \sim_{\mathsf{FG}(B)} (q, [y]_q)\big) = (x \sim_B y) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q.$$

上記の同値関係 $\sim_{\mathsf{FG}(B)}$ の具体的記述の導出はあまり自明ではないので，計算過程の詳細を記述しておくと，もし $r \leqslant p, q$ ならば，

$$r \in \big((p, [x]_p) \sim_{B'} (q, [y]_q)\big) \iff [x_p]|_r = [y_q]|_r \iff [x]_r = [y]_r \iff r \in (x \sim_B y)$$

となっている．さて，この計算結果を見る限り，$\mathsf{FG}(B)$ は B とかなり近いので，何らかの意味で同型であると言えそうである．具体的には，おそらく $x \in |B|$ と $(p, [x]_p) \in |B'|$ を対応させればよさそうだ．しかし，与えられた元 x からどのように $p \in P$ を選べばよいだろうか．たとえば，Ω-集合の元 x の帰属度 $\mathbf{E}x$ はあくまで Ω の元であり，${\downarrow}p$ の形であるとは限らない．また，逆に $(p, [x]_p)$ から x の選択は，代表元の取り方に依存しないだろうか．

実を言えば，B と $\mathsf{FG}(B)$ を対応させるためには，元 x と元 $(p, [x]_p)$ を対応させるという考え方ではうまく行かない．Ω-集合の射は，集合の元を別の集合の元に移すという写像形式ではうまく行かず，全く新しい発想が必要である．このために必要なものがハイティング値関数的関係の概念であるが，これについては第 15.1 節を見よ．

§ 12. グロタンディーク位相と層意味論

12.1. クリプキ層意味論

ここまでで，直観主義論理に対する様々な解釈を扱ってきた．直観主義論理とは，排中律 $\varphi \vee \neg\varphi$ をアプリオリには仮定しない論理であったが，ただ一口に，排中律 $\varphi \vee \neg\varphi$ や二重否定除去 $\neg\neg\varphi \to \varphi$ と言っても，様々な種類の排中律，二重否定除去の断片がある．これらをすべてを一緒くたにしては，真の意味で古典論理と直観主義論理を理解したことにはならないだろう．実際，古典論理と直観主義論理の隙間には，無限種類の**中間論理** (*intermediate logic*) が存在することが非常によく知られている．

古典論理と直観主義論理の中間の世界を理解するためには，もっとフレキシブルに様々なタイプの解釈を扱う枠組みが必要になる．たとえば，直観主義論理の BHK 解釈では，ある時点で $\varphi \vee \psi$ が成り立つと述べるためには，その時点で φ が成り立つのか ψ が成り立つのか知っていなければならない．しかし，ここの解釈をもう少しフレキシブルに調整して，様々な種類の論理を考えてもよいのではないだろうか．たとえば，

- どちらが真かを直ちに決定する必要はない．

- どちらが正しいかの決定を少しだけ遅延させてもよい．

というタイプの解釈を考えることもまた重要ではないだろうか．存在文 $\exists x\varphi(x)$ についても同様である．存在の証拠を直ちに見つける必要はなく，存在の証拠を見つけるのを少しだけ待ってやってもいいのではないだろうか．

ともあれ，説明を容易にするために，一旦は選言文 $\varphi\vee\psi$ に集中しよう．直観主義クリプキ意味論における選言文の解釈をもう一度書き出しておけば，以下のようなものであった．

- (クリプキ意味論) $p\Vdash\varphi\vee\psi\iff p\Vdash\varphi$ or $p\Vdash\psi$.

クリプキ意味論の亜種として，ベス意味論 (Beth semantics) がある．ベス意味論では，証拠の発見に遅延が許され，「世界 p で $\varphi\vee\psi$ が成り立つ」と述べる際に，「世界 p 以後のどのような分岐を辿っても，いずれ φ または ψ のどちらかが成り立つ」ということが保証されていればよい．ここで，ベス意味論では世界の可能性は次々に分岐していくことはあっても，合流することはない．形式的には，世界の集合 W は葉の無い木[*30]をなす．したがって，ベス意味論における「または」の解釈を形式的に書き下せば，以下のようになる．

- (ベス意味論) $p\Vdash\varphi\vee\psi\iff(\forall\alpha\ni p\text{ path})(p\geqslant\exists q\in\alpha)\ q\Vdash\varphi$ or $q\Vdash\psi$.

同値表現として，バーを使う定義もある．地点 $p\in P$ のバー (bar) とは，部分集合 $B\subseteq P$ であり，p を含む任意のパス α は必ず B のある元を含む，というものである．バーを用いると，ベス意味論における「または」の解釈は以下のように書き直すこともできる．

- (ベス意味論) $p\Vdash\varphi\vee\psi\iff(\exists B\text{ bar for }p)(\forall q\in B)\ q\Vdash\varphi$ or $q\Vdash\psi$.

このベス意味論は，「局所的に何が成立するか」を議論する意味論の一種であると考えることもできる．具体的には，たとえば位相空間 X を考えているとして，X の各開集合 U において局所的に成立する式について議論する意味論である．開集合 U において論理式 φ が局所的に真である，ということを $U\Vdash\varphi$ と書くことにしよう．この意味論において，「$\varphi\vee\psi$ が大域的に真である」ということは，「空間 X のどこにいても，局所的には φ または ψ のどちらかが成り立っている」ということであるとする．つまり，形式的には，以下のように真偽を定義する．

- (局所意味論) $X\Vdash\varphi\vee\psi\iff(\forall x\in X)(x\in\exists U\subseteq X\text{ open})\ U\Vdash\varphi$ or $U\Vdash\psi$.

この性質は，被覆の言葉で言い直すこともできる．つまり，後者の条件は，X のある開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して，各 $U\in\mathcal{U}$ において局所的に φ または ψ のいずれかが真であると決定されている，より一般に，開被覆の言葉を用いれば，局所意味論は以下のように与えられる．

- (局所意味論) $U\Vdash\varphi\vee\psi\iff(\exists\mathcal{U}\text{ open cover of }U)(\forall V\in\mathcal{U})\ V\Vdash\varphi$ or $V\Vdash\psi$.

上記の局所意味論は，位相空間 X の開集合全体のなす完備束 $P=(\mathcal{O}(X),\subseteq)$ 上のクリプキ意味論の亜種だと思うこともできる．この順序の意味で，局所意味論は，証拠の発見に少々の遅延が許されていると言える．

もう一つ，重要な意味論を紹介するために，半順序 P が与えられているとしよう．ベス意味論では，すべてのパス上のどこかで証拠が見つかることを要求していたが，この条件をさらに少し緩めたい．次の意味論は，

[*30] ここでは，半順序集合 P が**木** (*tree*) であるとは，任意の $p\in P$ に対して，$\uparrow p=\{q\in P:q\geqslant p\}$ が有限集合であるものを指すことにする．木の極小元は葉 (leaf) と呼ばれる．木 P の無限部分全順序をパス (path) と呼ぶ．

すべてのパス上で証拠が見つかる必要はなく，ジェネリックなパス上で証拠が見つかればよい，証拠は先に稠密にあればよい，というタイプである．具体的には，この意味論は以下によって与えられる．

- (強制意味論) $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)\ r \Vdash \varphi$ or $r \Vdash \psi$.

これは集合論などの分野で用いられる**強制法** (*forcing*) を起源とするアイデアである．この定義ももう少し整理すると，半順序 P の部分集合 $D \subseteq P$ が p **の下で稠密** (*dense below* p) であるとは，任意の $q \leqslant p$ に対して，ある $r \leqslant q$ が存在して，$r \in D$ となることを指す．この言葉を用いれば，強制意味論は以下のように表すことができる．

- (強制意味論) $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff (\exists D \text{ dense below } p)(\forall q \in D)\ q \Vdash \varphi$ or $q \Vdash \psi$.

さて，ベス意味論，局所意味論，強制意味論のいずれも，わざわざ一度別の定義に書き直したことには理由がある．これらの定義は，すべて同じパターンであることに気づくだろうか．具体的には，

$$J_p^{Kr} = \{\{p\}\}, \qquad J_p^{Be} = \{B \subseteq P : B \text{ bar for } p\},$$
$$J_p^{loc} = \{U \subseteq P : U \text{ cover of } p\}, \qquad J_p^{Fo} = \{D \subseteq P : D \text{ dense below } p\}.$$

を考え，J_p を上のいずれかであるとしよう．このとき，各意味論はすべて以下のようなパターンを持っている．

$$p \Vdash \varphi \vee \psi \iff (\exists V \in J_p)(\forall q \in V)\ q \Vdash \varphi \text{ or } q \Vdash \psi.$$

上記の解釈の下で，$(J_p^{Kr})_{p\in P}, (J_p^{Be})_{p\in P}, (J_p^{loc})_{p\in P}, (J_p^{Fo})_{p\in P}$ は順に，通常のクリプキ意味論，ベス意味論，局所意味論，強制意味論に対応していることが分かる．つまり，この種の様々なクリプキ型意味論を考えるということは，$J = (J_p)_{p\in P}$ を指定することに他ならない．この J は，バー，被覆，稠密といった概念だったりするが，ここではこれらを総称して「被覆」と呼ぶことにする．

専門用語を用いれば，実は，$J^{Kr}, J^{Be}, J^{loc}, J^{Fo}$ のいずれも（各元の下方閉包を取ると）グロタンディーク位相あるいはグロタンディーク被覆系と呼ばれるものの一種である．グロタンディーク被覆系のあるところには，クリプキ型意味論（クリプキ-ジョヤル意味論）がある．この被覆系のアイデアを用いることによって，クリプキ型意味論の様々なバリエーション，選言型命題・存在型命題に対する証拠の提示に対する様々な遅延タイプを統一的に扱うことが可能になる．このアイデアについて，これから丁寧に説明していこう．まずは，バーや稠密性といった概念を取り込むように，どのように「被覆」の概念を抽象化すればよいか，ということについて，これから議論していこう．

12.2. 形式位相

■集合上の被覆関係: まず，被覆の概念の持つ性質を抽象化していこう．通常，集合 A が集合族 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ に被覆されるとは，$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ を満たすことを指す．この被覆の持つ性質をどんどんリストアップしていこう．まず，被覆概念は以下の「反射律」を満たす．

- （$\in$-反射） $A \in \mathcal{U}$ ならば，A は $\mathcal{U}$ に被覆されている．
- （$\subseteq$-反射） $A \subseteq B$ ならば，A は $\{B\}$ に被覆されている．

次に，被覆概念は以下の「推移律」も満たす．

- （左 $\subseteq$-推移） $A \subseteq B$ であり，B が $\mathcal{U}$ に被覆されるならば，A も $\mathcal{U}$ に被覆される．
- （右 $\subseteq$-推移） $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ であり，A が $\mathcal{U}$ に被覆されるならば，A は $\mathcal{V}$ にも被覆される．

実際には，これらを統合する，より強い推移性を持つ．集合族 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ に被覆されるとは，$\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$ であることを意味するとする．これは，任意の $U \in \mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ に被覆されることと同値である．

- (被覆推移) A が $\mathcal{U}$ に被覆され，$\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ に被覆されるならば，A は $\mathcal{V}$ に被覆される．

また，集合族 $\mathcal{U}$ が集合 A を被覆するとき，$\mathcal{U}$ の A への制限 $\mathcal{U}|_A := \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ もまた A を被覆する．実際，集合 A の被覆関係を議論する際には，A の部分集合だけを考えればいいはずである．

- (制限) A が $\mathcal{U}$ に被覆されることと，$\mathcal{U}$ の A への制限 $\mathcal{U}|_A$ に被覆されることは同値である．

集合上の被覆関係は，局所性の順方向を更に強めた性質も満たす．集合族 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ に対して，$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U} \text{ and } V \in \mathcal{V}\}$ と定義する．ここで，$\mathcal{U}|_A = \mathcal{U} \wedge \{A\}$ であることに注意する．

- (局所) $A \in \mathcal{V}$ ならば，A が $\mathcal{U}$ に被覆されることと A が $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ に被覆されることは同値である．
- (交叉) A が $\mathcal{U}$ にも $\mathcal{V}$ にも被覆されるならば，A は $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ にも被覆される．

性質 (制限) は，(局所) を $\mathcal{V} = \{A\}$ へと適用したものとして得られることに注意しよう．一般的な設定では，(局所) の方がより抽象化しやすいため，これをしばしば (制限) の代替物として扱う．さて，被覆に関する様々な性質を一気に述べたため，少し圧倒されてしまうかもしれないが，後で確認するように，このうちの極少数の性質だけで残りの性質を導くことができる．したがって，後の議論ではこのうちの少数の性質だけを取り扱うことになるので，あまり心配する必要はない．

■半順序上の被覆: さて，それでは，これらの性質を抽象化しよう．ここからは，集合 A の代わりに半順序 P の元 $p \in P$ を考え，集合族 $\mathcal{U}$ の代わりに部分集合 $U \subseteq P$ を考えることになる．上で導入した用語を一般的な設定に補正すると，部分集合 $U, V \subseteq P$ に対して，$U \wedge V = (\downarrow U) \cap (\downarrow V)$ として定義する．これから考えるものは，

「p は U に被覆される」ことを意味する関係 $p \lhd U$

の性質を分析することである．上で述べた被覆の性質を関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ の言葉を使って書き下せば，以下のような性質群を得られる．

- 反射律と関連する性質:
  - ($\in$-反射) $p \in U \implies p \lhd U$.
  - ($\leqslant$-反射) $p \leqslant q \implies p \lhd q$.
- 推移律と関連する性質:
  - (左 $\leqslant$-推移) $p \leqslant q \lhd U \implies p \lhd U$.
  - (右 $\subseteq$-推移) $p \lhd U \subseteq V \implies p \lhd V$.
  - ($\lhd$-推移) $p \lhd U \lhd V \implies p \lhd V$.
- 局所性と関連する性質:
  - (順制限) $p \lhd U \implies p \lhd U|_p$.
  - (逆制限) $p \lhd U|_p \implies p \lhd U$.

– (順局所) $p \in V$ and $p \lhd U \implies p \lhd U \wedge V$.
– (逆局所) $p \in V$ and $p \lhd U \wedge V \implies p \lhd U$.
– (交叉) $p \lhd U$ and $p \lhd V \implies p \lhd U \wedge V$.

- (下方) ${\downarrow}U = {\downarrow}V \implies (p \lhd U \iff p \lhd V)$.

ここで，$p \lhd q$ は $p \lhd \{q\}$ を意味し，$U \lhd V$ は，任意の $q \in U$ に対して $q \lhd V$ であることを意味する．後者によって $\lhd$ は $\mathfrak{P}(P)$ 上の関係ともみなせるが，このとき，性質 ($\lhd$-推移) は，$\lhd$ に関する推移律と同値である．また，$U|_p$ は $U \wedge \{p\}$ を意味する．性質 (制限) と (局所) は重要な性質であるため，詳細な分析のために (順) と (逆) に分解した．この (順制限) と (逆制限) を併せて (制限) と呼び，同様に，(順局所) と (逆局所) を併せて (局所) と呼ぶ．性質 (下方) については上では説明しなかったが，これも通常の被覆について成立することは明らかである．この性質があると，P の部分集合として，下方集合だけ考えればよいことが導かれる．下方集合のみを考える恩恵は色々とあるが，たとえば下方集合であれば $U \wedge V = U \cap V$ が成立する．

用語. 関係 $p \lhd U$ が成立するとき，p は U に **$\lhd$-被覆**されるという．

観察 12.1. 関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ の性質に関して，以下が成り立つ．

(1) ($\in$-反射)+(左 $\leqslant$-推移) $\Longrightarrow$ ($\leqslant$-反射).
(2) ($\leqslant$-反射)+(右 $\subseteq$-推移) $\Longrightarrow$ ($\in$-反射).
(3) ($\lhd$-推移)+($\leqslant$-反射) $\Longrightarrow$ (左 $\leqslant$-推移).
(4) ($\lhd$-推移)+($\in$-反射) $\Longrightarrow$ (右 $\subseteq$-推移).
(5) ($\lhd$-推移)+($\in$-反射)+(左 $\leqslant$-推移) $\Longrightarrow$ (下方).
(6) (右 $\subseteq$-推移)+(下方) $\Longrightarrow$ (逆局所) $\Longrightarrow$ (逆制限).
(7) (交叉)+($\in$-反射) $\Longrightarrow$ (順局所) $\Longrightarrow$ (順制限).

Proof. (1) $p \leqslant q$ のとき，$\in$-反射性より $p \leqslant q \lhd q$ であるから，左 $\leqslant$-推移性より $p \lhd q$ を得る．

(2) $p \in U$ のとき，$\leqslant$-反射性より $p \lhd \{p\} \subseteq U$ であるから，右 $\subseteq$-推移性より $p \lhd U$ を得る．

(3) $p \leqslant q \lhd U$ のとき，$\leqslant$-反射性より $p \lhd q \lhd U$ であるから，$\lhd$-推移性より $p \lhd U$ を得る．

(4) $U \subseteq V$ のとき，任意の $q \in U$ に対して $q \in V$ であるから，$\in$-反射性より $q \lhd V$ を得るが，これは $U \lhd V$ を意味する．したがって，もし $p \lhd U \subseteq V$ ならば $p \lhd U \lhd V$ であるから，$\lhd$-推移性より $p \lhd V$ を得る．

(5) $U \subseteq {\downarrow}V$ のとき，任意の $p \in U$ について，$p \leqslant q \in V$ となる q が存在する．このとき，$\in$-反射性より $p \leqslant q \lhd V$ であるから，左 $\leqslant$-推移性より $p \lhd V$ を得る．したがって，$U \lhd V$ を得る．後は，(3) と同様にして，$\lhd$-推移性より $p \lhd U$ から $p \lhd V$ を導くことができる．

(6) $U \wedge V \subseteq {\downarrow}U$ なので，右 $\subseteq$-推移性より，$p \lhd U \cap V$ は $p \lhd {\downarrow}U$ を導く．したがって，下方性から逆局所性が導かれる．また，$V = \{p\}$ を考えれば，逆局所性から逆制限性を導ける．

(7) $\in$-反射性より，$p \in V$ ならば $p \lhd V$ であるから，交叉性より，$p \lhd U$ ならば $p \lhd U \wedge V$ を得る．また，$V = \{p\}$ を考えれば，順局所性から順制限性を導ける． □

上記の観察から重要な点をピックアップすると，以下の 3 つの導出関係である．

- (下方) の下で: (右 $\subseteq$ 推移) $\Longrightarrow$ (逆局所) $\Longrightarrow$ (逆制限).
- ($\in$-反射) の下で: (交叉) $\Longrightarrow$ (順局所) $\Longrightarrow$ (順制限).
- ($\in$-反射) の下で: ($\lhd$-推移) $\Longrightarrow$ (右 $\subseteq$-推移).

定義 12.2. 半順序 P 上の関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ に関する以下の性質を考える．

(1) **開関係** (*open relation*) とは，(左 $\leqslant$-推移), (下方) を満たす関係である．
(2) **準被覆関係** (*quasi-covering relation*) とは，(制限) を満たす開関係である．
(3) 準被覆関係が**単調** (*monotone*) とは，(右 $\subseteq$-推移) を満たすことを指す．
(4) **被覆関係** (*covering relation*) とは，($\in$-反射), ($\lhd$-推移) を満たす単調準被覆関係である．

半順序 P と被覆関係 $\lhd$ の対 $(P, \lhd)$ を**形式位相** (*formal topology*) または**形式空間** (*formal space*) と呼ぶ．

注意． 観測 12.1 より，被覆関係とは，上に挙げた 9 つの性質すべてを満たす関係である，と言い換えることもできる．実際には，性質 ($\in$-反射), ($\leqslant$-反射), (交叉), ($\lhd$-推移) の 4 つだけで上に挙げた 9 つの性質すべてを導くので，形式位相の文脈では，被覆関係として，この 4 つの性質を満たす関係として導入されることが多い．

具体例を挙げると，通常の意味での被覆関係は，定義 12.2 の意味での被覆関係にもなっている．

例 12.3 (標準被覆関係)**.** もし P が完備束ならば，関係 $\lhd_P$ を

$$p \lhd_P U \iff p \leqslant \bigvee U$$

で定義すれば，$\lhd_P$ は被覆関係である．位相空間 X の開集合のなす完備束 $P = (\mathcal{O}(X), \subseteq)$ を考えている場合には，これは開集合の被覆関係を表す．

例 12.4 (強制関係)**.** 半順序 P の部分集合 $S \subseteq P$ に対して，関係 $\Vdash$ を

$$p \Vdash U \iff (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)\ r \in U$$

で定義すれば，$\Vdash$ は被覆関係である．

例 12.5 (局所強制関係)**.** 半順序 P の部分集合 $S \subseteq P$ に対して，関係 $\lhd_S$ を

$$p \lhd_S U \iff S|_p \subseteq {\downarrow} U \iff (\forall q \leqslant p)[q \in S \ \rightarrow\ (\exists r \leqslant q)\ r \in U].$$

で定義すれば，$\lhd_S$ は被覆関係である．

また，位相に細かさや粗さの概念があるように，被覆関係にも細かさや粗さの概念が考えられる．

定義 12.6. 被覆関係 $\lhd$ が $\lhd'$ 以上に粗い ($\lhd' \leqslant \lhd$) とは，$p \lhd' U$ ならば $p \lhd U$ であることを意味する．

12.3. ロケールのニュークリアス

12.3.1 写像の性質

被覆に関する抽象的性質は，あまり見慣れないものが多く，感覚を掴みづらい．たとえば，準被覆関係の定義として，なぜ上記のような 4 つの性質が選ばれたかについては，あまり明らかではないだろう．この理解を深めるためには，被覆に関する性質を，写像の性質に置き換えてみるとよい．関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ は，常に写像 $j_\lhd \colon \mathfrak{P}(P) \to \mathfrak{P}(P)$ あるいは $J_\lhd \colon P \to \mathfrak{P}\mathfrak{P}(P)$ と同一視することができる．後者のタイプの写像も後で見るように有用であるが，前者のタイプの写像の方が始域と終域が同一で扱いやすいため，まずは前者

を考えることにしよう．具体的には，以下のようにして，半順序 P に関する関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ から写像 $j_\lhd \colon \mathfrak{P}(P) \to \mathfrak{P}(P)$ を定義し，逆に写像 $j \colon \mathfrak{P}(P) \to \mathfrak{P}(P)$ から関係 $\lhd_j \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ も定義する．

$$p \in j_\lhd(U) \iff p \lhd U, \qquad\qquad p \lhd_j U \iff p \in j(U).$$

明らかに，$\lhd_{j_\lhd} = \lhd$ かつ $j_{\lhd_j} = j$ である．また，被覆の粗さの度合いについては，以下のように表される．

$$\lhd \leqslant \lhd' \iff (\forall U)\ j_\lhd(U) \subseteq j_{\lhd'}(U)$$

それでは，被覆に関する性質を写像の言葉に書き直そう．

観察 12.7. 被覆 $\lhd$ に関する性質と写像 j に関する性質には以下の対応がある．

(1) $\lhd$ が (下方) を満たす $\iff$ ${\downarrow}U = {\downarrow}V$ ならば $j_\lhd(U) = j_\lhd(V)$ である．
(2) $\lhd$ が (左 $\leqslant$-推移) を満たす $\iff$ $j_\lhd(U)$ が下方集合である．

Proof. (1) は明らか．(2) については，$\lhd$ が左 $\leqslant$-推移性を持つならば，$p \leqslant q \in j_\lhd(U)$ は $p \in j_\lhd(U)$ を導く．これは，$j_\lhd(U)$ が下方集合であることを意味する． □

上記の観測より，(下方), (左 $\leqslant$-推移) が，議論を下方集合に制限するために必要な性質であることが分かる．つまり，$\mathcal{O}(P)$ を P の下方集合全体の集合としたとき，関係 $\lhd$ が (下方), (左 $\leqslant$-推移) を満たすことと，$j_\lhd$ を $\mathcal{O}(P)$ 上の写像とみなせることは同値である．これが，開関係の条件に (下方) と (左 $\leqslant$-推移) を要求している理由である．具体的には，関係と写像の対応を以下のように補正すればよい．

$$p \in j_\lhd(U) \iff p \lhd U, \qquad\qquad p \lhd_j U \iff p \in j({\downarrow}U).$$

もし $\lhd$ が (下方) を満たすならば，これらも互いに逆構成になっており，$\lhd_{j_\lhd} = \lhd$ かつ $j_{\lhd_j} = j$ が成立する．次に，写像に関する以下の性質を考えよう．

- (単調) $U \subseteq V \implies j(U) \subseteq j(V)$.
- (上昇) $U \subseteq j(U)$.
- (冪等) $j \circ j(U) \subseteq j(U)$.
- ($\cap$-保存) $j(U) \cap j(V) \subseteq j(U \wedge V)$.
- (順安定) $j(U) \cap V \subseteq j(U \wedge V)$.
- (逆安定) $j(U \wedge V) \cap V \subseteq j(U) \cap V$.
- (自然) $j(U)|_p \subseteq j(U|_p)$.

また，先程と同様に，(順安定) と (逆安定) を合わせて (安定) と呼ぶ[*31]．つまり，(安定) とは，$j(U) \cap V = j(U \wedge V) \cap V$ を満たすことである．もし関係 $\lhd$ に下方性を要求するのであれば，観測 12.7 より，$j_\lhd$ の始域は $\mathcal{O}(P)$ と思ってよいが，この場合，$\cap$-保存性および安定性における $U \wedge V$ は，$U \cap V$ に置き換えてよい．また，$\cap$-保存性は順安定性より強い性質であるが，冪等性の下で同値であることはよく知られている．

観察 12.8. 写像 $j \colon \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(P)$ について，(冪等)+(順安定) $\implies$ ($\cap$-保存).

Proof. 下方集合 U, V について，$j(U) \cap j(V) \leqslant j(U \cap j(V)) \leqslant jj(U \cap V) \leqslant j(U \cap V)$. □

*31 Harold Simmons らによる用語で安定性と呼ばれているものは，本稿における順安定性である．

それでは，$\lhd$ に関する性質と $j_\lhd$ に関する性質の対応関係について見ていこう．

観察 12.9. 関係 $\lhd$ に関する性質と写像 j に関する性質には以下の対応がある．

(1) $\lhd$ が右 $\subseteq$-推移的 $\iff$ $j_\lhd$ が単調．
(2) $\lhd$ が $\in$-反射的 $\iff$ $j_\lhd$ が上昇．
(3) $\lhd$ が交叉的 $\iff$ $j_\lhd$ が $\cap$-保存．
(4) $\lhd$ が局所的 $\iff$ $j_\lhd$ が安定的．

Proof. (4) $j_\lhd$ の安定性の定義は，もし $p \in V$ ならば，$p \in j_\lhd(U)$ であることと $p \in j_\lhd(U \wedge V)$ であることが同値であることを述べている．つまり，$p \lhd U$ と $p \lhd U \wedge V$ が同値であることであるが，これは $\lhd$ が局所的であることの定義そのものである． □

$\lhd$-推移性と安定性の写像の言葉への翻訳は上記ほどは明らかでなく，少しの前提条件が必要となる．観測 12.9 より，右 $\subseteq$-推移性と単調性に対応があるが，この右 $\subseteq$-推移性／単調性は，以下のような基本的な対応を示すために有用である．

命題 12.10. 右 $\subseteq$-推移的かつ下方性を持つ関係 $\lhd$ について，以下が成立する．

(1) $\lhd$ が $\lhd$-推移的 $\iff$ $j_\lhd$ が冪等．
(2) $\lhd$ が制限的 $\iff$ $\lhd$ が局所的 $\iff$ $j_\lhd$ が安定的 $\iff$ $j_\lhd$ が自然．

上記の主張は特に単調写像 $j\colon \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(P)$ に関する各種性質の特徴付けを与える．

補題 12.11. 関係 $\lhd$ に関する性質と写像 j に関する性質には以下の関係がある．

(1) $j_\lhd$ が単調かつ冪等 $\implies$ $\lhd$ が $\lhd$-推移的 $\implies$ $j_\lhd$ が冪等．
(2) $\lhd$ が制限的 $\implies$ $j_\lhd$ が順安定的 $\implies$ $j_\lhd$ が自然 $\implies$ $\lhd$ が順制限的．

Proof. (1) $\lhd$-推移性を示すために，$p \lhd U \lhd V$ を仮定する．このとき，明らかに $U \lhd V$ は $U \subseteq j_\lhd(V)$ と対応するので，$j_\lhd$ の単調性と冪等性より $p \in j_\lhd(U) \subseteq j_\lhd \circ j_\lhd(V) \subseteq j_\lhd(V)$ を得る．よって，$p \in j_\lhd(V)$ を得るが，これは $p \lhd V$ を意味する．

次に，$j_\lhd$ の冪等性を示すために，$p \in j_\lhd \circ j_\lhd(U)$ を仮定する．いま，$j_\lhd(U) \lhd U$ が常に成り立つことに注意する．なぜなら，任意の $p \in j_\lhd(U)$ について，$p \lhd U$ であるためである．したがって，$p \lhd j_\lhd(U) \lhd U$ であるから，$\lhd$-推移性より $p \lhd U$ を得るが，これは $p \in j_\lhd(U)$ を意味する．

(2) $j_\lhd$ の安定性を示すために，$p \in j_\lhd(U) \cap V$ を取る．特に $p \lhd U$ であるから，$\lhd$ の順制限性より，$p \lhd U|_p$ を得る．また，$p \in V$ なので，$U|_p \subseteq U \wedge V$ であるが，これは $U|_p = (U \wedge V)|_p$ を意味する．よって，逆制限性より $p \lhd U \wedge V$ となるので，$p \in j_\lhd(U \wedge V)$ を得る．$j_\lhd$ の安定性が自然性を導くことは，$V = {\downarrow}p$ を考えればよい．

$\lhd$ の順制限性を示すために，$p \lhd U$ を仮定する．このとき，$p \in {\downarrow}p$ かつ $p \in j_\lhd(U)$ であるから，自然性より $p \in j_\lhd(U) \cap {\downarrow}p = j_\lhd(U)|_p \subseteq j_\lhd(U|_p)$ を得る．これは $p \lhd U|_p$ を意味する． □

Proof (命題 12.10). (1) 補題 12.11 より直ちに従う．(2) 観測 12.1 より，$\lhd$ が右 $\subseteq$-推移的かつ下方性を持つならば，逆制限的である．したがって，補題 12.11 より，目的の主張は直ちに従う． □

写像 j の自然性は，$j\colon \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(P)$ が前層の射とみなせることを保証するための性質である．ここで，Ω_p は $\downarrow p$ の下方集合全体であり，$\Omega = (\Omega_p)_{p \in P}$ が作用 $U \mapsto U|_p$ によって前層をなしていたことを思い出そう．

観察 12.12. $j\colon \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(P)$ を単調写像とし，$U \in \Omega_p$ に対して，$j_p(U) = j(U)|_p$ と定義する．このとき，

$$j \text{ が自然} \iff \text{写像族 } (j_p\colon \Omega_p \to \Omega_p)_{p \in P} \text{ が前層の射である．}$$

Proof. j が単調ならば，任意の $U \in \Omega_p$ および $q \leqslant p$ に対して，$U|_q \subseteq U$ より，$j_q(U|_q) = j(U|_q)|_q \subseteq j(U)|_q = j(U)|_p|_q = j_p(U)|_q$ は常に成立する．この逆向きの包含 $j(U)|_q \subseteq j(U|_q)$ は j の自然性を表し，等式 $j_p(U)|_q = j_q(U|_q)$ が $(j_p)_{p \in P}$ が前層の射であることを表していたから，これより，j の単調性の下で，j の自然性と $(j_p)_{p \in P}$ が前層の射であることが同値であることが分かる． □

観測 12.12 の観点は重要である．前層の圏において Ω が真理値対象であったことを思い出すと，この観点は

単調準被覆関係は，真理値対象上の射，つまり真理値を変換する演算である

という，一見全く異なる 2 つの概念を結び付ける視点を提示してくれる．したがって，前層やクリプキ意味論について議論する際には，j の自然性も重要そうである．これは関係 $\lhd$ の制限性に対応するため，準被覆関係の定義に (制限) が含まれていた理由も妥当であろう．

この制限性は，ハイティング含意を用いると，非常に自然な特徴付けを与えることができる．命題 11.1 で記述したハイティング含意 $\multimap$ の明示的記述 $U \multimap V = \{p \in P : U|_p \subseteq V\}$ について思い出そう．このとき，写像に関する次の性質を考える．

- (内的外延) $U \leftrightarrow V \leqslant j(U) \leftrightarrow j(V)$.

より明示的に記述すれば，$j_\lhd$ の内的外延性は，$U|_p = V|_p$ ならば $j_\lhd(U)|_p = j_\lhd(V)|_p$ であることを意味する．

命題 12.13. 関係 $\lhd$ が制限的 $\iff$ $j_\lhd$ が内的外延性を満たす．

Proof. ($\Rightarrow$) いま，$\lhd$ が制限的であるとし，$U|_p = V|_p$ かつ $q \in j_\lhd(U)|_p$ を仮定する．このとき，$q \lhd U$ であるから，順制限性より $q \lhd U|_q$ が成立する．仮定より $q \leqslant p$ なので，$U|_q = V|_q$ であるから，$q \lhd V|_q$ である．したがって，逆制限性より $q \lhd V$ であるから，$q \in j_\lhd(V)|_p$ を得る．

($\Leftarrow$) 逆に，$j_\lhd$ が内的外延性を満たすと仮定する．任意の p と U に対して，$U|_p = (U|_p)|_p$ であるから，内的外延性より $j_\lhd(U)|_p = j_\lhd(U|_p)|_p$ を得る．特に，$p \lhd U$ であることと $p \lhd U|_p$ であることは同値である． □

さて，ここまでで示した導出関係のうち，重要なものをまとめておくと，以下のようなものがある．

- ($\cap$-保存) + (単調) $\Longrightarrow$ (安定) $\Longrightarrow$ (内的外延) $\Longrightarrow$ (自然).
- 実際，(単調) の下で，(安定) $\iff$ (内的外延) $\iff$ (自然).
- (冪等) + (上昇) $\Longrightarrow$ (単調); および (冪等) + (安定) $\Longrightarrow$ ($\cap$-保存).

したがって，いま $j\colon \mathcal{O}(P) \to \mathcal{O}(P)$ が与えられたとき，$p \lhd_j U$ を $p \in j({\downarrow}U)$ によって定義することにすれば，

$$\begin{aligned} \lhd_j \text{ が準被覆関係} &\iff j \text{ が内的外延性を満たす} \\ \lhd_j \text{ が単調準被覆関係} &\iff j \text{ が単調かつ自然} \\ \lhd_j \text{ が被覆関係} &\iff j \text{ が単調，上昇，冪等かつ自然} \end{aligned}$$

という対応が成り立っている．また，最後の条件については，観測 12.8 より，j が単調，上昇，冪等かつ $\cap$-保存であることと同値である．

12.3.2 ニュークリアス

さて，$\mathfrak{P}(P)$ あるいは P の下方集合全体 $\mathcal{O}(P)$ 上の写像 j を扱っていたが，より一般に，完備ハイティング代数 Ω 上の写像 $j\colon \Omega \to \Omega$ についても同様の性質を考えることができる．

- (単調) $x \leqslant y \implies j(x) \leqslant j(y)$.
- (上昇) $x \leqslant j(x)$.
- (冪等) $j \circ j(x) \leqslant j(x)$.
- (内的単調) $x \rightarrow y \leqslant j(x) \rightarrow j(y)$.
- (内的外延) $x \leftrightarrow y \leqslant j(x) \leftrightarrow j(y)$.
- ($\wedge$-保存) $j(x) \wedge j(y) \leqslant j(x \wedge y)$.
- (順安定) $j(x) \wedge y \leqslant j(x \wedge y)$.
- (逆安定) $j(x \wedge y) \wedge y \leqslant j(x) \wedge y$.

注意. Ω は完備ハイティング代数であるから，真理値の集合だと思ってもよいし，命題の集合だと思ってもよい．このとき，Ω 上の写像は，命題上の単項写像，すなわち**様相** (*modality*) の一種であるとみなす考え方もある．その場合は，上の j を必然性演算子 $\Box$ 等の記号に置き換えてみるのもまた良いだろう．非正規様相論理 (non-normal modal logic) の文脈では，単調性は公理 (M) として知られ，$j(x \wedge y) \leqslant j(y)$ と表される．$\wedge$-保存性は公理 (C) として知られる．単調性 (M) と $\wedge$-保存性 (C) を組み合わせて，正規様相論理の基本公理 (K) を導くことができる．

$$\text{(K):}\quad j(x \rightarrow y) \leqslant j(x) \rightarrow j(y).$$

逆に，公理 (K) と $\top$-保存性の公理 (N) $j(\top) = \top$ を用いて，単調性 (M) と $\wedge$-保存性 (C) を導くことができる．順安定性の仮定の下で，$\top$-保存性 (N) と上昇性は同値である．

さて，$j\colon \Omega \to \Omega$ の性質に関する分析を進めよう．一般の完備ハイティング代数に対しては，制限性や自然性の直接の対応物はない．ただし，命題 12.13 より，内的外延性が制限性の役割を担うと考えてもよさそうだ．また，命題 12.10 より，安定性あるいは内的外延性によって自然性．内的単調性はここまででは扱っていなかったが，単調性をハイティング代数の中で解釈したものであり，非常に重要な性質である．一般的には，内的単調性は単調性より強い性質なので，混同しないように注意しよう．

命題 12.14. 写像 $j\colon \Omega \to \Omega$ に対して，以下が成立する．

(1) (安定) $\implies$ (内的外延) $\implies$ (順安定).

(2) (内的単調) $\Longleftrightarrow$ (単調)+(順安定).

Proof. (1) j の安定性を仮定する．まず，$x \wedge (x \leftrightarrow y) = x \wedge y$ である．なぜなら，$x \wedge (x \leftrightarrow y) \leqslant x \wedge (x \to y) \leqslant x \wedge y$ であり，また $x \wedge y \leqslant x, y$ より $x, y \leqslant x \to y, y \to x$ が導かれるので，$x \wedge y \leqslant x \leftrightarrow y$ である．対称的な議論より，$x \wedge (x \leftrightarrow y) = y \wedge (x \leftrightarrow y)$ を得る．したがって，安定性より，

$$j(x) \wedge (x \leftrightarrow y) = j(x \wedge (x \leftrightarrow y)) \wedge (x \leftrightarrow y) = j(y \wedge (x \leftrightarrow y)) \wedge (x \leftrightarrow y) = j(y) \wedge (x \leftrightarrow y).$$

特に $(x \leftrightarrow y) \wedge j(x) \leqslant j(y)$ および $(x \leftrightarrow y) \wedge j(y) \leqslant j(x)$ が成立する．以上より，$x \leftrightarrow y \leqslant j(x) \leftrightarrow j(y)$ を得る．

次に，j の内的外延性を仮定する．まず，$y \leqslant x \leftrightarrow x \wedge y$ であることに注意する．なぜなら $x \wedge y \leqslant x \wedge y$ より $y \leqslant x \to x \wedge y$ であり，また，$x \wedge y \wedge y \leqslant x$ より $y \leqslant x \wedge y \to x$ である．したがって，内的外延性より，$y \leqslant x \leftrightarrow x \wedge y \leqslant j(x) \leftrightarrow j(x \wedge y)$ を得るが，これは $j(x) \wedge y \leqslant j(x \wedge y)$ を導く．

(2) ($\Rightarrow$) 前者は明らか．後者については，内的単調ならば明らかに内的外延性を満たすので，(1) から従う．

($\Leftarrow$) $x \to y \leqslant j(x) \to j(y)$ を示すためには，$(x \to y) \wedge j(x) \leqslant j(y)$ を示せばよい．いま，順安定性と単調性を合わせれば，

$$(x \to y) \wedge j(x) \leqslant j((x \to y) \wedge x) \leqslant j(y)$$

を得る． □

この主張と命題 12.10 から分かることは，Ω 上の内的単調写像が単調準被覆関係に対応しているということである．それでは，次は被覆関係に対応する写像概念について調べよう．

定義 12.15. 完備ハイティング代数 Ω 上の写像 $j\colon \Omega \to \Omega$ で単調，上昇かつ冪等であるものを**閉包作用素** (*closure operator*) と呼ぶ．このとき，$\wedge$-保存閉包作用素のことを**ニュークリアス** (*nucleus*) と呼ぶ．

注意. ニュークリアスの概念は，**ロケール** (*locale*) の理論などで重要な役割を担う．

閉包作用素の単調性を内的単調性に強めたものを**内的閉包作用素** (*internal closure operator*) と呼ぶことにする．つまり，内的閉包作用素は，内的単調な閉包作用素である．ニュークリアスの概念は，内的閉包作用素として特徴付けることができる．

系 12.16. 写像 $j\colon \Omega \to \Omega$ がニュークリアスであることと，j が内的閉包作用素であることは同値である．

Proof. j が上進かつ $\wedge$-保存ならば，$j(x) \wedge y \leqslant j(x) \wedge j(y) \leqslant j(x \wedge y)$ であるから，j は安定である．よって，j は単調かつ安定なので，観測 12.14 より，内的単調である．逆に，j が内的単調ならば，観測 12.14 より，j は安定であり，さらに j は冪等でもあるならば，

$$j(x) \wedge j(y) \leqslant j(j(x) \wedge y) \leqslant jj(x \wedge y) \leqslant j(x \wedge y)$$

を得る．よって，j がニュークリアスであることが示された． □

以上より，被覆と Ω 上の演算に関して，以下のような対応を得られた．

$$\text{準被覆関係} \iff \text{内的外延写像}$$
$$\text{単調準被覆関係} \iff \text{内的単調写像}$$
$$\text{被覆関係} \iff \text{ニュークリアス} \iff \text{内的閉包作用素}$$

ところで，**前ニュークリアス** (*prenucleus*) と呼ばれる概念が複数ある．Escardo などは，$\wedge$-保存的な上昇単調写像を前ニュークリアスと呼び，一方で，Banaschewski らや教科書 “Frames and Locales” 等は，順安定的な上昇単調写像を前ニュークリアスと呼んでいる．本稿では前者を E-前ニュークリアス，後者を B-前ニュークリアスと呼ぶことにする．観測 12.14 より，B-前ニュークリアスは，上昇的内的単調写像に他ならない．一般には，B-前ニュークリアスは $\wedge$ を保存するとは限らないことに注意する．

$$\text{ニュークリアス} \implies E\text{-前ニュークリアス} \implies B\text{-前ニュークリアス} \implies \text{内的単調写像} \implies \text{内的外延写像}$$

ところで，被覆の概念を下方集合上の写像，あるいは真理値対象 Ω 上の射と捉えたメリットは色々あるが，その一つとして，被覆とは全く別の観点から具体例を色々と得られるという点があるだろう．具体的には，様々な論理演算を用いて，（準）被覆関係の例を与えることができる．

例 12.17 (開様相)**.** 各 $a \in \Omega$ に対して，論理演算 $j^a \colon \Omega \to \Omega$ を次によって定義する．

$$j^a(x) = (a \twoheadrightarrow x).$$

このとき，j^a がニュークリアスであることを確認しよう．内的単調性については，$(a \twoheadrightarrow x) \wedge (x \twoheadrightarrow y) \leqslant a \twoheadrightarrow y$ であるから，$x \twoheadrightarrow q \leqslant (a \twoheadrightarrow x) \twoheadrightarrow (a \twoheadrightarrow y)$ を得る．上進性については，$x \wedge a \leqslant x$ より $x \leqslant a \twoheadrightarrow x$ である．冪等性については，$j^aj^a(x) \wedge a = (a \twoheadrightarrow a \twoheadrightarrow x) \wedge a \leqslant a \twoheadrightarrow x$ であるが，$j^aj^a(x) \wedge a \leqslant a$ でもあるので，$j^aj^a(x) \wedge a \leqslant (a \twoheadrightarrow x) \wedge a \leqslant x$ を得るから，$j^aj^a(x) \leqslant a \twoheadrightarrow x = j^a(x)$ である．

例 12.18 (閉様相)**.** 各 $a \in \Omega$ に対して，論理演算 $j_a \colon \Omega \to \Omega$ を次によって定義する．

$$j_a(x) = (x \vee a).$$

このとき，j_a がニュークリアスであることを確認しよう．単調性については，$x \leqslant y$ ならば明らかに $x \vee a \leqslant y \vee a$ である．上昇性は明らかであり，冪等性についても，$x \vee x \vee a \leqslant x \vee a$ である．$\wedge$-保存性についても，分配律より $(x \wedge y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a)$ を得る．

例 12.19 (ニュークリアスではない例)**.** 論理演算 $x \mapsto x \wedge a$ はニュークリアスではない．なぜなら，上昇性 $x \leqslant x \wedge a$ が一般には満たされないためである．しかし，この論理演算は，冪等 $\wedge$-保存内的単調写像である．内的単調性については，$(x \twoheadrightarrow y) \wedge x \wedge a \leqslant y \wedge a$ なので，$x \twoheadrightarrow y \leqslant (x \wedge a) \twoheadrightarrow (y \wedge a)$ である．冪等性と $\wedge$-保存性は明らかである．

例 12.20 (ブール様相)**.** 各 $a \in \Omega$ に対して，論理演算 $b_a \colon \Omega \to \Omega$ を次によって定義する．

$$b_a(x) = (x \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a.$$

このとき，b_a がニュークリアスであることを確認しよう．内的単調性については，$(x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow a) \leqslant (x \twoheadrightarrow a)$ なので，$(x \twoheadrightarrow y) \wedge (y \twoheadrightarrow a) \wedge ((x \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a) \leqslant a$ であるから，左辺の第 2 項，第 3 項を順番に右辺に移行すれば，$x \twoheadrightarrow y \leqslant ((x \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow ((y \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a)$ を得る．上昇性については，$x \wedge (x \twoheadrightarrow a) \leqslant a$ より $x \leqslant (x \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a$ である．冪等性については，まず $x \leqslant y$ のとき $y \twoheadrightarrow a \leqslant x \twoheadrightarrow a$ であることに注意する．なぜなら，$(y \twoheadrightarrow a) \wedge x \leqslant (y \twoheadrightarrow a) \leqslant y \leqslant a$ であるから，$y \twoheadrightarrow a \leqslant x \twoheadrightarrow a$ である．いま，$y \wedge (y \twoheadrightarrow a) \leqslant a$ より $y \leqslant (y \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a$ であるから，上の注意より $((y \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a) \twoheadrightarrow a \leqslant y \twoheadrightarrow a$ を得る．このとき，$y = x \twoheadrightarrow a$ とすれば，目的の冪等性を得る．

例 12.21 (二重否定様相)**.** $\bot$ を Ω の最小元とすると，$a = \bot$ としたときのブール様相 $b_\bot$ は二重否定様相と呼ばれる．

$$b_\bot(x) = \neg\neg x = (x \twoheadrightarrow \bot) \twoheadrightarrow \bot.$$

$\Omega = \mathcal{O}(P)$ であるとき，強制関係 $\Vdash$ に対応するニュークリアス $j_\Vdash$ は二重否定様相 $\neg\neg$ に対応する．なぜなら，位相空間論の言葉で述べれば，$\neg U$ は開集合 U の外部 $\mathsf{ext}(U)$ のことであるから，以下を得る．

$$\begin{aligned} p \in \neg U \iff p \in \mathsf{ext}(U) &\iff (\forall V \in \mathcal{O}(P))\ (U \cap V = \varnothing \text{ and } p \in \alpha) \\ &\iff U \cap {\downarrow} p = \varnothing \iff (\forall q \leqslant p)\ q \notin U. \end{aligned}$$

したがって，

$$p \in \neg\neg\alpha \iff (\forall q \leqslant p)\ q \notin \neg\alpha \iff (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)\ r \in U$$

となるから，$j_\Vdash = \neg\neg$ を得る．より一般のブール様相 b_a を $\Omega = \mathcal{O}(P)$ において考えると，開集合 $A \in \mathcal{O}(P)$ に対して $b_A(U) = (U \twoheadrightarrow A) \twoheadrightarrow A$ の定義を分解すれば，これは強制関係を閉集合 $T = P \backslash A$ に制限したものである．

$$p \in b_A(U) \iff (\forall q \in T \cap {\downarrow} p)(\exists r \in T \cap {\downarrow} q)\ r \in U.$$

12.4. グロタンディーク位相

次に関係 $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ を二重冪集合を終域とする写像 $J^\lhd \colon P \to \mathfrak{P}\mathfrak{P}(P)$ とみなす観点に移行してみよう．簡単のため，ここからは関係が (下方) を満たすことは最低条件とすると，$\lhd \subseteq P \times \mathcal{O}(P)$ であると考えてよい．したがって，対応する写像の型は $J^\lhd \colon P \to \mathfrak{P}\mathcal{O}(P)$ であるが，説明の都合上，$J^\lhd(p)$ を $J^\lhd_p$ と表すことにする．まず，素朴な定義として以下が考えられるだろう．

$$U \in J^\lhd_p \iff p \lhd U, \qquad\qquad p \lhd_J U \iff U \in J_p.$$

このとき，明らかに，$\lhd_{J^\lhd} = \lhd$ かつ $J^{\lhd_J} = J$ である．関係に関する性質を翻訳すると，$J \colon P \to \mathfrak{P}\mathcal{O}(P)$ に関する以下のような性質に辿り着く．

- (逆単調) $p \leqslant q \implies J_q \subseteq J_p$.
- (上方閉) $U \subseteq V$ and $U \in J_p \implies V \in J_p$.
- (最大元) $P \in J_p$.
- (交叉) $U \in J_p$ and $V \in J_p \implies U \cap V \in J_p$.
- (貼り合わせ) $[U \in J_p \text{ and } (\forall q \in U)\ V \in J_q] \implies V \in J_p$.
- (関手) $U \in J_p$ and $q \leqslant p \implies U|_q \in J_q$.

これらの性質の一部をよく知られた数学的用語と対応付けるならば，たとえば J が最大元，上方閉，交叉性を持つということは，各 J_p が**フィルター** (filter) であることを意味する．最大元性を非空性 $J_p \neq \varnothing$ に取り替えても同値である．さて，上記のうちの多くの性質については，以下のような明らかな対応がある．

観察 12.22. 関係 $\lhd$ に関する性質と写像 J に関する性質には以下の対応がある．

(1) $\lhd$ が左 $\leqslant$-推移的 $\iff$ $J^\lhd$ が逆単調．
(2) $\lhd$ が右 $\subseteq$-推移的 $\iff$ $J^\lhd$ が上方閉．
(3) $\lhd$ が交叉的 $\iff$ $J^\lhd$ が交叉的．
(4) $\lhd$ が $\lhd$-推移的 $\iff$ $J^\lhd$ が貼り合わせ性を持つ．

注意． 二重冪集合を終域とする写像は，様相論理における**近傍フレーム** (*neighborhood frame*) などを扱う際にもよく用いられる．観測 12.9 と第 12.3.2 節の注意で述べているように，$j_\lhd$ の単調性 (M) と $J^\lhd$ の上方閉性，$j_\lhd$ の $\wedge$-保存性 (C) と $J_\lhd$ の交叉性，$j_\lhd$ の $\top$-保存性 (N) と $J_\lhd$ の最大元性がそれぞれ対応していることは，自明に分かる．実際，直観主義非正規様相論理の公理 (M), (C), (N) と直観主義近傍フレームの上方閉，交

叉性，最大元性がそれぞれ対応していることはよく知られている．特に，公理 (M) + (C) + (N) に対応するフレームは，各 J_p がフィルターとなる．

ところで，被覆と近傍フレームを分け隔てる大きな性質のひとつは，被覆の持つ制限性[*32]である．つまり，もし $\lhd \subseteq P \times \mathfrak{P}(P)$ が何らかの意味で被覆を表す関係であるならば，$p \lhd U$ かどうかは $U \subseteq {\downarrow}p$ だけの振る舞いから定まるはずである．したがって，$U \in J_p$ ならば $U \subseteq {\downarrow}p$ であるという要求も加えることにする．つまり，J は集合族 $(J_p)_{p \in P}$ であり，$J_p \in \Omega_p$ を満たすものであると仮定する．このように，J を Ω_p の部分集合たちの族とみなす利点としては，たとえば

$$J \text{ が (関手) を満たす} \iff J \text{ が } \Omega \text{ の部分前層である}$$

という特徴付けができる点などがある．ともあれ，$J_p \subseteq \Omega_p$ であることを保証するためには，関係 $\lhd$ との対応に以下のような補正が必要である．

$$J_p^{\lhd} = \{U|_p : p \lhd U\}, \qquad\qquad p \lhd_J U \iff U|_p \in J_p.$$

被覆の粗さの度合いについて，以下が成り立つことも容易に確認できる．

$$\lhd_J \leqslant \lhd_{J'} \iff (\forall p)\ J_p \subseteq J'_p.$$

しかし，実は $\lhd$ から $J^{\lhd}$ への変換の方を用いると，上記の対応の証明に困難が生じる．実は，$\lhd_J$ と $J^{\lhd}$ の定義を補正したため，これらが互いに逆構成であることが明らかではなくなってしまっている．実際，$J^{\lhd_J} = J$ は良いが，$\lhd_{J^{\lhd}} = \lhd$ は無条件では成り立たない．なぜなら，$\lhd_J$ は常に制限的であるためである．したがって，これらが逆構成であることを保証するためには，関係 $\lhd$ は少なくとも制限的でなければならない．

命題 12.23. 任意の写像 J に対して，$J^{\lhd_J} = J$ が成立する．任意の制限的な関係 $\lhd$ に対して，$\lhd_{J^{\lhd}} = \lhd$ が成立する．

Proof. まず $U \in J_p^{\lhd_J}$ であることは，ある V について，$p \lhd_J V$ かつ $U = V|_p$ となることと同値であるが，$p \lhd_J V$ は $V|_p \in J_p$ であることを意味するから，これは単に $U \in J_p$ であることと同値である．次に，$\lhd_{J^{\lhd}}$ の定義を分解すると，

$$p \lhd_{J^{\lhd}} U \iff U|_p \in J_p^{\lhd} \iff \exists V\ [p \lhd V \text{ and } U|_p = V|_p]$$

となる．いま，最後の条件を得ていると仮定すると，$\lhd$ の順制限性より，$p \lhd V|_p$ を得るが，$V|_p = U|_p$ より，$p \lhd U|_p$ となる．よって，逆制限性より，$p \lhd U$ を得る．逆に，$p \lhd U$ は最後の条件を導くから，$p \lhd U$ と $p \lhd_{J^{\lhd}} U$ は同値である．$\square$

これが制限性が重要である理由の一つである．もちろん，制限性は準被覆系に課している条件であるから，この前提は特に問題を生むことはない．ところで，$J^{\lhd}$ と $\lhd_J$ の定義を修正したことで，観測 12.22 の結果は少しばかり崩れている．定義の変更に合わせて，(上方閉), (最大元), (貼り合わせ) は以下のように補正すべきだろう．

- (上方閉) $U \subseteq V \subseteq {\downarrow}p$ and $U \in J_p \implies V \in J_p$.

[*32] ただし，近傍フレームの類似概念として，部分最小論理 (subminimal logic) における N-フレーム (N-frame) があるが，N-フレームには制限性が課されている．様相論理では，外延性は規則 ($\mathsf{E}_\Box$) $(A \leftrightarrow B) \vdash (\Box A \leftrightarrow \Box B)$ として扱われているのに対し，部分最小論理では，外延性は内的外延性公理 $(A \leftrightarrow B) \to (NA \leftrightarrow NB)$ として扱われるためである (cf. 命題 12.13).

- (最大元) $\downarrow p \in J_p$.
- (貼り合わせ) $[U \in J_p \text{ and } V \in \Omega_p \text{ and } (\forall q \in U)\ V|_q \in J_q] \implies V \in J_p$.

この補正によって，再び観測 12.22 を得られることは容易に確認できる．また，さらに以下の特徴付けを得られる．

観察 12.24. 関係 $\lhd$ に関する性質と写像 J に関する性質には以下の対応がある．

(1) $\lhd_J$ が $\in$-反射的 $\iff$ J が最大元を持つ．

(2) $\lhd_J$ が左 $\leqslant$-推移的 $\iff$ J が関手的．

Proof. (1) $\in$-反射性より $p \lhd_J \downarrow p$ なので，$\downarrow p = \downarrow p|_p \in J_p$ である．逆に，$\in$-反射性を示すために，$p \in U$ を仮定する．このとき，最大元性より，$U|_p = \downarrow p \in J_p$ であるから，$p \lhd_J U$ を得る．

(2) まず，$U \in J_p$ かつ $q \leqslant p$ を仮定する．このとき，$q \leqslant p \lhd_J U$ なので，$\lhd$ の左 $\leqslant$-推移性より $q \lhd_J U$ であるから，$U|_q \in J_q$ を得る．次に，左 $\leqslant$-推移性を示すために，$q \leqslant p \lhd_J U$ を仮定すると，$U|_p \in J_p$ であるが，J の関手性より $U|_q = U|_p|_q \in J_q$ である．したがって，$q \lhd_J U$ を得る． □

上の観測について，$\lhd_J$ の定義の制限性が大きく働いている．もし，$\lhd$ が制限的ならば，命題 12.23 より，上記の対応は，$\lhd$ と $J^{\lhd}$ に対しても成立する．準被覆関係が左 $\leqslant$-推移性と制限性を満たしていたことから，特に，以下の対応を得る．

$$\lhd \text{ が準被覆関係} \iff J^{\lhd} \text{ が } \Omega \text{ の部分前層}.$$

同様に，各 J_p が Ω_p のフィルターであるような部分前層 $J \rightarrowtail \Omega$ をフィルター部分前層と呼ぶことにすれば，以下のような対応を得る．

$$\lhd \text{ が } \in\text{-反射的かつ交叉的な単調準被覆関係} \iff J^{\lhd} \text{ が } \Omega \text{ のフィルター部分前層}.$$

定義 12.25. 最大元を持ち，貼り合わせの性質を満たす部分前層 $J \rightarrowtail \Omega$ は，P 上の**グロタンディーク位相** (*Grothendieck topology*) あるいは**グロタンディーク被覆系** (*Grothendieck coverage*) と呼ばれる．このとき，対 (P, J) はしばしば**半順序景** (*posite*) と呼ばれる．

用語として，$U \in J_p$ であるとき，U は p の **J-被覆** (J-*cover*) と言うことにする．このとき，しばしば $p \lhd_J U$ と書く．さて，ここまでの結果をまとめると，以下を得る．

$$\lhd \text{ が被覆関係} \iff J^{\lhd} \text{ が } P \text{ 上のグロタンディーク位相}.$$

あるいは，$(P, \lhd)$ が形式位相であることと $(P, J^{\lhd})$ が半順序景であることは同値であると言ってもよい．

例 12.26 (最小被覆系)**.** 半順序 P の元 p に対して $J^{\mathrm{id}}_p = \{\downarrow p\}$ と定義すれば，J^{id} は P 上の最小のグロタンディーク位相である．

例 12.27 (最大被覆系)**.** 半順序 P の元 p に対して $J^{0=1}_p = \Omega_p$ と定義すれば，$J^{0=1}$ は P 上の最大のグロタンディーク位相である．

例 12.28. 開様相から得られる被覆系は，$A \subseteq P$ に対して，$J^A_p = \{U \in \Omega_p : A|_p \subseteq U\}$ の形である．閉様相から得られる被覆系は，$A \subseteq P$ に対して，$J_p = \{U \in \Omega_p : p \in U \cup A\}$ の形である．

例 12.29 (稠密被覆系). 半順序 P の元に対して,

$$J_p^{\mathrm{dense}} = \{c \in \Omega_p : (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)\ r \in c\}$$

と定義すると,これは P 上のグロタンディーク位相である.この位相を稠密位相 (dense topology) と呼ぶ.

より一般的には,半順序に限らず,圏上でグロタンディーク位相の概念を考えることができ,圏とその上のグロタンディーク位相の対は**景** (*site*) と呼ばれる.

ところで,被覆系 J と様相 j の対応関係について,もう少し明瞭な説明を与えることができる.まず,$\lhd$ が準被覆関係であったならば,上で見たように $J^{\lhd}$ は Ω の部分前層と考えることができ,また,観測 12.12 より,$j_{\lhd} \colon \Omega \to \Omega$ は前層の射とみなすことができる.前の節で,特性関数の一般化として特性射というものを扱ったが,$J^{\lhd}$ や $j_{\lhd}$ の構成をよく見つめ直すと,実は,$j_{\lhd} \colon \Omega \to \Omega$ は $J^{\lhd} \rightarrowtail \Omega$ の特性射になっているということが分かる.

$$\begin{tikzcd} J^{\lhd} \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathbf{1} \arrow[d, "\top"] \\ \Omega \arrow[r, "j_{\lhd}"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad J_p^{\lhd} = \{U \in \Omega_p : j_{\lhd,p}(U) = \top_p\}.$$

この考え方は一般の圏上のグロタンディーク位相を扱う際にも重要である.圏 C 上のグロタンディーク位相もまた,C 上の前層の圏における真理値対象 Ω の部分対象で貼り合わせの性質等を満たすものとして定義される.しかし,これも Ω の部分対象であることは変わりないから,特性射 $j \colon \Omega \to \Omega$ を持ち,先ほどと同様に,これは様相のようなものだと考えることができる.

12.5. クリプキ・ジョヤル意味論

トポスの内部で如何なる数学が成立するかの分析のための道具として,**クリプキ・ジョヤル意味論** (*Kripke-Joyal semantics*) が知られている.半順序景に対する層トポスの場合には,クリプキ・ジョヤル意味論は非常に分かりやすく,第 12.1 節で述べたクリプキ層意味論に一致する.たとえば,(P, J) を半順序景とすると,J-層トポスにおける構造 $(D_p)_{p \in P}$ 上の充足関係は以下のように特徴付けられる.

- $p \Vdash \bot \iff \varnothing \in J_p$.
- $p \Vdash \varphi \wedge \psi \iff p \Vdash \varphi$ and $p \Vdash \psi$.
- $p \Vdash \varphi \vee \psi \iff (\exists U \in J_p)(\forall q \in U)\ [q \Vdash \varphi$ or $q \Vdash \psi]$.
- $p \Vdash \varphi \to \psi \iff (\forall q \leqslant p)\ [q \Vdash \varphi \implies q \Vdash \psi]$.
- $p \Vdash \exists x \varphi(x) \iff (\exists U \in J_p)(\forall q \in U)(\exists z \in D_q)\ q \Vdash \varphi(z)$.
- $p \Vdash \forall x \varphi(x) \iff (\forall q \leqslant p)(\forall z \in D_q)\ q \Vdash \varphi(z)$.

これは実際に,第 12.1 節で説明した通りの意味論になっている.選言文と存在文の解釈に注目してもらえば,選言と存在の証拠を見つける地点を遅延させていることが見て取れるだろう.たとえば,地点 p で選言文や存在文が正しいことを主張するためには,p のある J-被覆 U の各地点で選言文や存在文の証拠を見つけてくればよい.

注意. J が稠密位相の場合には,この定義は (弱) 強制関係に対応するので,これは強制法の一般化のように言われることもある.ただし,もちろん,強制法で重要なのは,コーエン強制法,ランダム強制法,レイヴァー

強制法などの「どういうタイプの強制法がどういう性質を持つか」という部分（つまり，たとえば位相的典型性や確率的典型性をはじめとする「様々な典型性概念」の差異の分析）などであり，強制関係の定義云々の部分ではないことには注意する．

ところで, 半順序上のグロタンディーク位相とニュークリアスは同値概念だったが, 上記の層意味論をニュークリアスの言葉で書き換えると，また別の観点と結び付く．各論理式 φ に対して，$[\![\varphi]\!]^j = \{p \in P : p \Vdash \varphi\}$ と書くことにすれば，まず，命題論理式部分については，以下のように書き直せる．

- $[\![\bot]\!]^j = j(\emptyset)$.
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]^j = [\![\varphi]\!]^j \cap [\![\psi]\!]^j$.
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]^j = j([\![\varphi]\!]^j \cup [\![\psi]\!]^j)$.
- $[\![\varphi \to \psi]\!]^j = [\![\varphi]\!]^j \twoheadrightarrow [\![\psi]\!]^j$.

選言文については少し非自明かもしれないので，丁寧に説明すると，上記のクリプキ層意味論において，$p \Vdash \varphi \vee \psi$ であることは，ある U が存在して，$p \in j(U)$ かつ $U \subseteq [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$ であることであると書き直せる．しかし，j の単調性から，$U = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$ だけ考えればよい．述語論理部分については，少し記法を導入する必要があるが，$\exists x^D A(x) = \{q \in P : (\exists z \in D_q)\ q \in A(z)\}$ とし，$\forall x^D A$ も同様に定義すれば，以下のように表すことができる．

- $[\![\exists x \varphi(x)]\!]^j = j(\exists x^D [\![\varphi(x)]\!]^j)$.
- $[\![\forall x \varphi(x)]\!]^j = \forall x^D [\![\varphi(x)]\!]^j$.

これは，古典論理の直観主義論理への埋め込みとして 1930 年代に考案された，ゲーデル-ゲンツェンの二重否定翻訳（のバリエーションの一つ）と同様の論理式の変換を行っている．ここで，二重否定翻訳は $j = \neg\neg$ の場合であるが，より一般的に，ゲーデル-ゲンツェンの j-翻訳というものが考えられている．

$$\bot^j = j(\bot), \qquad (\varphi \wedge \psi)^j = \varphi^j \wedge \psi^j, \qquad (\varphi \vee \psi)^j = j(\varphi^j \vee \psi^j),$$
$$(\varphi \to \psi)^j = \varphi^j \to \psi^j, \qquad (\exists x \varphi)^j = j(\exists x \varphi^j), \qquad (\forall x \varphi)^j = \forall x \varphi^j.$$

注意． 上記のように，$(P, \lhd)$ が被覆関係であれば，中間論理の意味論を与えるが，$(P, \lhd)$ が準被覆関係でしかない場合には，そうはいかない．しかし，たとえ準被覆関係にしか過ぎなくても，直観主義様相論理の意味論を与えることはできる．具体的には，$(P, J^{\lhd})$ を直観主義近傍フレームであると解釈すればよい．

$$p \Vdash \Box\varphi \iff [\![\varphi]\!]_p \in J_p$$

この節のポイントをまとめておこう．半順序 P があるとき，P 上の前層の意味論はフレーム P 上のクリプキ意味論であった．さらに P 上の被覆系 J の概念があるとき，半順序景 (P, J) の意味論が与えられ，これによってクリプキ意味論を変化させることができる．これは，P 上の J-層と呼ばれるものの意味論になっている．専門用語を用いて，より正確に語ると，P 上の前層たちはトポスをなし，さらに P 上の被覆系 J があるときに，P 上の J-層たちもまたトポスをなす．これらの意味論が，クリプキ意味論とそれを J-遅延させたものに対応する．より一般的に，半順序 P ではなく，圏 $\mathcal{C}$ 上の被覆系の概念があり，同様のプロセスを考えることができる．

§ 13. 計算可能性理論における層意味論

13.1. 実現可能性解釈・再考

抽象化の醍醐味は，その抽象化の果てに，遠く離れた分野の全く別概念の思いがけぬ類似性が見つかることである．今から見る，思いがけぬ繋がりとは，次の 2 つの類似性である．

- グロタンディーク位相 J の下で，対象 p が篩 U によって J-被覆される．
- オラクル J[*33] の補助の下で，コンピュータ・プログラム p によって問題 U が解かれる．

抽象化なくして，一体誰が，グロタンディーク被覆系とオラクル付き計算による問題解決を結びつけるだろうか.

とはいえ，順を追って考えていくと，被覆系とオラクルを結びつけるのはそんなに突飛なことではない．直観主義論理の代表的な意味論として，直観主義クリプキ意味論と実現可能性解釈があったことを思い出そう．クリプキ意味論は被覆系によって変化を引き起こされたが，実現可能性解釈は一体何によって変化を引き起こされるかを考えてみよう．

古典二階算術のモデルにも，計算可能関数からなるイデアルという古典計算可能数学の標準モデルがあった．これに様々なオラクルたちを付加したイデアルを考えることで，その他の二階算術の体系やその否定のモデルを構築することができた．直観主義論理の実現可能性解釈においても同様であり，オラクル f を指定して，証拠の探索に f を利用可能なような実現可能性解釈を考えればよい:

$A \to B$ の証拠は，A の証拠を入力すると B の証拠を出力とする f-相対的計算可能関数

このような実現可能性解釈のオラクルへの相対化を考えても，直観主義論理のモデルとなることが予期される．以上をまとめると，直観主義論理の代表的な意味論であるクリプキ意味論と実現可能性解釈の双方に，それぞれ変化を引き起こすファクターがある．

- クリプキ意味論の変化を引き起こすファクターは，被覆系である．
- 実現可能性解釈の変化を引き起こすファクターは，オラクルである．

このように説明すると，被覆系とオラクルの結び付きの可能性が，急に説得力を帯びてくる．そして，実際に，被覆系とオラクルは数学的に厳密に深く関わるものなのだ．前層トポスの部分トポスは，被覆系による表示を持つ（景として表される）ように，計算可能数学のトポス（実現可能性トポス）の部分トポスは，オラクルによる表示を持ち，そしてその意味論は，そのオラクルに相対的な実現可能性解釈と一致する．

13.2. オラクル付き計算

13.2.1 チューリング還元

注釈で述べたように，オラクルとは，計算中に値を参照可能なデータである．最も古典的な設定では，型 2 計算 $\Phi(f)$ の文脈での型 1 入力 f のことである．高階計算には様々なバリエーションがあったが，全域関数

[*33] 古典的な計算論の文脈では，計算可能な型 2 汎関数 Φ に型 1 関数 f を入力した際の計算 $\Phi(f)$ における，型 1 入力 f のことをオラクルと呼ぶ（Bauer の言葉を借りれば，オラクルとは「入力」である）．ここではもう少し漠然と，計算中に値を参照可能なデータ f のことをオラクルと呼ぶ．ここで，計算概念の有限性より，計算の各ステップでは f の有限個の値しか参照されない．

$f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ については標準的な計算論，つまり K_2-計算論を採用する．しかし，f が部分関数だった場合には，さらに数多くの計算論へと分岐し，その中にはここまでで触れなかったタイプの計算論がある．

■部分関数オラクル: 部分関数 g による相対的計算を考える際，g の定義域が全域でないという点に注意する必要がある．プログラムは計算中に g の定義域の外にクエリを投げてしまう場合があり，その場合，神託からクエリに対する返答が返ってくることがない．この場合の動作をどう設定するかによって，部分関数を参照する相対的計算の定義には色々とバリエーションがある．代表的なものとして，一つは 1950 年代に導入されたクリーネ流の相対的計算，すなわち K_2-計算論であり，もう一つは，遅れて 1970 年頃に導入されたサッソ流の相対的計算がある．

部分関数を入力とする汎関数 $\Phi\colon (\mathbb{N}_\perp)^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ の K_2-計算論について思い出そう．これは，入力関数 f が与えられたとき，計算中で f の有限個の値 $f(n_0),f(n_1),f(n_2),\dots$ にアクセスして，$\Phi(f)$ の値を出力するものであった．

$$f(n_0),f(n_1),f(n_2),\dots \quad \overset{\Phi}{\longmapsto} \quad \text{output}$$

この計算プロセスは，少し異なる形で表現することもできる．プログラム Φ は，各 n に対して，$f(n)$ の値を尋ねることができる．この n を f へのクエリ (query) と呼ぶことにしよう．しかし，クエリの返答 $f(n)$ がいつ返ってくるかは分からず，もし $f(n)$ が未定義であったならば，返答は永遠に返ってこない．したがって，K_2-計算におけるプログラム Φ は，返答が返ってこない可能性を考慮して並行に複数のクエリを投げ，返答が得られた順番に $f(n_0),f(n_1),f(n_2),\dots$ というデータを得る．

クリーネ流（K_2-計算）とサッソ流の 2 つの流儀の違いは，f へのクエリに対する返答がなく計算がスタックした場合の振る舞いにある．

- クリーネ流の場合，並行に複数のクエリを投げることが許されており，どれかひとつのクエリの返答が返ってこなかったとしても，問題なく計算は進む．
- サッソ流の場合，一度，オラクルへクエリを投げたとき，返答があるまで待たなければならない．したがって，一度，オラクルの定義域の外にアクセスしてしまうと，計算がスタックしてしまう．

つまり，神託へのアクセス時の振る舞いが，クリーネ流は非決定的計算あるいは並行計算であり，サッソ流は逐次計算である．一見すると，サッソ流の方が計算概念として劣っているようだが，実はこのサッソ流の方が，直観主義論理の実現可能性解釈の文脈では適切な相対的計算概念となることを後で見る．

■探索問題: 計算論においては，決定問題の他にも様々なタイプの問題を取り扱い，その代表的なものとして**探索問題** (*search problem*) がある．探索問題とは，一言で述べれば，複数の解を持ち得る問題である．決定問題の場合には，解はイエスかノーかどちらか一つというものだったが，探索問題の場合は解が沢山あり，そのうちのどれか一つでも良いから求めたい，というものである．計算量の文脈などでは，探索問題は，解を持つか持たないかを判定しなければならないこともあるが，ここではそこまでの判定は要求しない．

最も単純なタイプの探索問題は，$\mathbb{N}$ 上の部分多価関数，つまり型 $\mathbb{N}\to\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ の部分関数として表せる．ここで，関数の入力が問題のインスタンス，出力がその解集合である．つまり，$f(n)$ は，問題 f の第 n 題の解全体の集合を表す．探索問題は，この $f(n)$ の元をどれでもよいから少なくとも一つ見つけよ，という問題であると解釈される．

例 13.1. 有限グラフ G を入力したとき，G の k-彩色を見つけよ．有限グラフやその上の彩色が自然数でコー

ドされているとすると，この問題は以下の多価関数 $\mathsf{Col}\colon \mathbb{N} \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ によって表される．

$$\mathsf{Col}(G) \ni c \iff c \text{ は } G \text{ の } k\text{-彩色である}$$

一般的に，グラフの k-彩色は複数種類あるかもしれないし，存在しないかもしれない．前者の場合は，1 つの解さえ見つければよい．後者の場合は，これは解なし問題であるが，そのような問題も考慮に入れる．ただし，解を持つか持たないかの判定は不要で，後者の場合は単に解けない問題というだけである．

一応注意点として，探索問題 f を扱うにあたって，n が f の定義域に入っていないということと，$f(n)$ の値が空集合であるということは全く別物であることを指摘しておこう．

- $n \notin \mathrm{dom}(f)$ は，第 n 題は存在しない（問題を出さない，解く必要がない）ことを意味する．
- $f(n) = \varnothing$ は，解の無い問題（解けない問題）を意味する．

前者は解く必要のない問題なので最も簡単な問題であり，後者は解けない問題なので最も難しい問題である．したがって，難易度を考えると全く逆の概念である．論理学的に言えば，前者が空虚な真 (vacuous truth) で，後者が偽 (false) に対応すると考えてもよい．これらは対極にある概念であるから，決して混同してはならない．

■探索問題のサッソ還元: 探索問題を解く，という方向性だけでなく，探索問題の解法をオラクルとして利用する計算というものもある．より正確には，探索問題の（いずれかの）解が与えられたとき，それを利用した計算である．形式的な設定としては，オラクル g が探索問題（多価関数）であるが，g-相対的計算 $\Phi(g)$ は一価関数とは異なる振る舞いをする．ここで紹介するものは，サッソ流計算のアイデアを用いた相対的計算である．

- $g(z)$ は 2 つ以上の解を持ち得るため，計算過程で $g(z)$ にアクセスしたとき，計算がその解毎に複数に分岐し，結果として，非決定的計算を生み出す．
- g-相対的に多価関数 f を計算可能であるとは，あるプログラム Φ が存在して，任意の入力 $n \in \mathrm{dom}(f)$ に対して，$\Phi(g)(n)$ はすべての計算のパスにおいて計算を停止し，$f(n)$ の解を出力することを指す．

サッソ流計算の長所は，計算の動作が，逐次的で線形であるため，ゲーム形式で表すことが可能であるという点である．サッソ流計算を表すゲームは，1990 年頃に van Oosten によって，**対話ゲーム** (*dialogue*) として導入されていた．ここでは，探索問題に対する対話ゲームを考えよう．これは，2 人のプレイヤー Oracle と Computer による完全情報ゲームである．

Oracle	Computer
$x_0 \in \mathrm{dom}(f)$	
	`Query:` $z_0 \in \mathrm{dom}(g)$
$x_1 \in g(z_0)$	
	`Query:` $z_1 \in \mathrm{dom}(g)$
$x_2 \in g(z_1)$	
$\vdots$	$\vdots$
	`Query:` $z_n \in \mathrm{dom}(g)$
$x_{n+1} \in g(z_n)$	
	`Halt:` $z_{n+1} \in f(x_0)$

- Oracle の手は自然数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ である．

- Computer の手は，記号と自然数の対 $(\texttt{Query}, z_i)$ または $(\texttt{Halt}, z_i)$ の形である．
  ▷ Query はオラクルへ質問する合図であり，Halt は計算を停止する合図である．
- Computer が勝利する $\iff$ 手 $(\texttt{Halt}, z_i)$ をいつか打ち，実際に $z_i \in f(x_0)$ である．
- f が g-相対的に計算可能 $\iff$ Computer が計算可能な必勝戦略を持つ．

13.2.2　多対一還元

■多対一還元: 決定問題の複雑性の指標として，チューリング還元以外にも色々なものがある．たとえば，エミール・ポストは 1944 年に，多対一還元，真理値表還元などの様々な還元を導入したが，そのうちの多対一還元だけを紹介しておく．

定義 13.2. 集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ に対して，A が B に**多対一還元可能** (*many-one reducible*) である $(A \leqslant_m B)$ とは，以下を満たすことを指す．

$$(\exists\varphi \text{ 計算可能})(\forall n \in \mathbb{N})\ [n \in A \iff \varphi(n) \in B].$$

特性関数を用いて書けば，上記の定義は，$\chi_A = \chi_B \circ \varphi$ と表すことができる．これも決定問題 B の解を知っていれば，決定問題 A を解くことができることを意味するが，チューリング還元との大きな違いの一つは，$\chi_A(n)$ を解くにあたって，χ_B のちょうど一つの値にしかアクセスしないという点がある．

このアイデアを拡張すれば，一価関数の多対一還元の定義も自然に考えられる．関数 $f, g\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について，f が g に多対一還元可能とは，以下を満たすことを指す．

$$(\exists\varphi \text{ 計算可能})(\forall n \in \mathbb{N})\ g(\varphi(n)) = f(n).$$

多対一還元を多価関数に拡張するためには，この定義の意味を再考する必要がある．これは，φ という計算可能なプロセスを用いて，g の $\varphi(n)$ 題の解を尋ね，それが f の解になっているということである．したがって，f, g が多価関数の場合には，この定義は以下のように補正される．

$$(\exists\varphi \text{ 計算可能})(\forall n \in \mathbb{N})\ g(\varphi(n)) \subseteq f(n).$$

部分多価関数の場合は，解く必要の題 $n \in \mathrm{dom}(f)$ だけ考えればよいが，ただし g-題へのクエリを作らなければならない．つまり，$\varphi(n) \in \mathrm{dom}(g)$ である．形式的には，部分多価関数 $f, g \colon \subseteq \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$ に対して，f が g に多対一還元可能 $(f \leqslant_m g)$ とは，あるプログラム φ が存在して，任意の x, y に対して，以下が成立することを意味する．

$$\begin{array}{rrcl} (\text{入力の変換}) & x \in \mathrm{dom}(f) & \Longrightarrow & \varphi(x) \in \mathrm{dom}(g); \\ (\text{出力}) & y \in g(\varphi(x)) & \Longrightarrow & y \in f(x). \end{array}$$

したがって，$f \leqslant_m g$ であるとき，探索問題 g の解を 1 つ知っていれば，f の解を少なくとも 1 つは得ることができる．多対一還元は，入力データのみを変換するが，出力データの変換も行う還元可能性があり，これはガロア-テューキー接続[*34]の一般化を用いて定義される．具体的には，$f \leqslant_{GT} g$ であるとは，あるプログラム φ_- と φ_+ が存在して，任意の x, y に対して，

$$\begin{array}{rrcl} (\text{入力の変換}) & x \in \mathrm{dom}(f) & \Longrightarrow & \varphi_-(x) \in \mathrm{dom}(g); \\ (\text{出力の変換}) & y \in g(\varphi_-(x)) & \Longrightarrow & \varphi_+(y) \in f(x). \end{array}$$

[*34] 半順序 P と Q の間の**ガロア-テューキー接続** (*Galois-Tukey connection*) とは，射 $\varphi^- \colon Q \to P$ と $\varphi^+ \colon P \to Q$ の対であり，任意の $p \in P$ と $q \in Q$ に対して，$\varphi^-(q) \leqslant p \implies q \leqslant \varphi^+(p)$ となるものを指す．

本稿では用いないので詳しくは説明しないが，上記のプログラム部分を別種の関数に変えたものは，集合論における基数不変量の理論などで重要な役割を担う (see e.g. Blass [?, Section 4])．本稿で最も重要な役割を担う還元可能性概念は，以下である．

定義 13.3. f が g に**ワイラオホ還元可能** (*Weihrauch reducible*)[*35]とは，あるプログラム φ_- と φ_+ が存在して，任意の x, y に対して，

$$\begin{array}{lrcl} (\text{入力の変換}) & x \in \mathrm{dom}(f) & \Longrightarrow & \varphi_-(x) \in \mathrm{dom}(g); \\ (\text{出力の変換}) & y \in g(\varphi_-(x)) & \Longrightarrow & \varphi_+(x,y) \in f(x). \end{array}$$

このとき，$f \leqslant_W g$ と書く．

一般化ガロア-テューキー射による還元の方が自然に見えるかもしれないが，計算には時間の流れがあるので，それを考慮に入れると，ワイラオホ還元は自然な意味を持つ．ワイラオホ還元の計算過程としては，以下のようになっている．

$$\begin{aligned} & f(x) \text{ の解を求めたい} \xrightarrow{\varphi_-} g \text{ の一箇所 } \varphi_-(x) \text{ の解を尋ねる} \\ & \qquad\qquad \xrightarrow{\text{神託}} \text{解 } y \text{ が返ってくる} \xrightarrow{\varphi_+} \text{この情報を参考に } f(x) \text{ の解を求める．} \end{aligned}$$

計算過程では，x の情報を持った上で，神託へのクエリ $\varphi_-(x)$ を作っており，クエリの解 y が返ってくる．その後，その時点で持っている情報すべてを利用して $f(x)$ の解を求めるのであるが，この時点では x と y の両方の情報を持っているはずだから，$\varphi_+(x, y)$ とするのが正しい．まとめると，ワイラオホ還元は，ちょうど一度だけ神託へアクセスする相対的計算に対応する．

対話ゲームの文脈では，ワイラオホ還元は，正確に 2 ラウンドで終了するゲームにおける必勝戦略を与える．具体的には，以下のプレイにおいて，$u = \varphi_-(x)$ かつ $z = \varphi_+(x, y)$ とすれば，Computer が対話ゲームに勝利する．

Oracle	Computer
$x \in \mathrm{dom}(f)$	
	`Query:` $u \in \mathrm{dom}(g)$
$y \in g(z_0)$	
	`Halt:` $z \in f(x_0)$

逆に，ゲームの必勝戦略のそれぞれ初手と第 2 手が還元 φ_- と φ_+ を与える．この還元可能性概念は，現代的な計算可能性理論においては最も重要な研究トピックの一つとなっている．

13.3. ローヴェア-ティアニー位相

前層トポスの部分トポスは，グロタンディーク被覆系による表示を持ち，特に半順序上の被覆系の場合にはニュークリアスに対応するのであった．半順序上でなくとも，ニュークリアスの類似物によって表示される．計算可能性理論のトポスである実効トポスの場合には，その具体的な記述は容易である．ニュークリアスとは，$\wedge$-保存閉包作用素であったが，単調性を省いた形で書いても同値である．

$$j(\top) = \top \qquad\qquad jj(x) = j(x) \qquad\qquad j(x \wedge y) = j(x) \wedge j(y)$$

[*35] Weihrauch の日本語表記として，筆者はずっとヴァイラウフと書いていた（国際会議などで Weihrauch 氏周辺の人の発音を聞く限り，筆者の耳にはそのように聞こえた）が，他の日本語話者はヴァイロッホと言ってたりワイラオホと言ってたりするので，周囲の意見に流されてそれに倣うことにする．

ニュークリアスの抽象化は，この形式を利用して導入することが多い．さて，ニュークリアスは，ハイティング代数 Ω 上の演算であり，ハイティング代数は，直観主義論理の真理値集合であった．計算論的なニュークリアスを導入するためには，計算論的な真理値集合とは何であるかについて考察する必要がある．実現可能性解釈において，命題 φ の真理値とは，φ の正しさの証拠たちである．つまり，証拠となり得るデータの集合を Data と書けば，各真理値は Data の部分集合であり，したがって，真理値集合は $\mathfrak{P}(\mathsf{Data})$ である．最も基本的なクリーネの実現可能性解釈においては，すべてのデータは自然数でコードされているので，真理値集合は $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ である．

それでは，真理値集合 $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ 上のニュークリアスを考えるとどうだろうか．一応，$\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ はハイティング前代数ではあるものの，これを潰してハイティング代数とすると自明化してしまい，ただニュークリアスを考えるだけでは何の意味もなくなってしまう．ただのニュークリアスではなく，我々が考えている構造を反映した内的ニュークリアスが必要だ．このアイデアを元にすると，計算論的なニュークリアスとは，写像 $j\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ であり，以下の性質を満たすものである．

- ($\top$-保存) $\top \twoheadrightarrow j(\top)$ が実現可能である．
- (冪等) $\forall x.\ jj(x) \twoheadrightarrow j(x)$ が実現可能である．
- ($\wedge$-保存) $\forall x, y.\ j(x \wedge y) \leftrightarrow j(x) \wedge j(y)$ が実現可能である．

これが，実効トポスにおける内的ニュークリアスあるいは**ローヴェア-ティアニー位相** (*Lawvere-Tierney topology*) と呼ばれるものである．以後は単に LT 位相と呼ぶ．

LT 位相について，上記の定義が採用されることが多いが，ところで，ニュークリアスには様々な同値な定義があった．実際，別の同値な定義を採用してもよいし，計算論的な設定においては，異なる特徴付けの方が適切である．たとえば，ニュークリアスは，以下のように導入できたことを思い出そう．

$$x \leqslant j(x) \qquad\qquad jj(x) \leqslant j(x) \qquad\qquad x \twoheadrightarrow y \leqslant j(x) \twoheadrightarrow j(y)$$

したがって，実効トポス上の LT 位相とは，$j\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ であり，以下の性質を満たすものである．

- (上昇) $\forall x.\ x \twoheadrightarrow j(x)$ が実現可能である．
- (冪等) $\forall x.\ jj(x) \twoheadrightarrow j(x)$ が実現可能である．
- (内的単調) $\forall x, y.\ (x \twoheadrightarrow y) \twoheadrightarrow (j(x) \twoheadrightarrow j(y))$ が実現可能である．

さて，被覆系においては，$p \in j(U)$ とは，p が U に j-被覆されることに対応するのであった．計算論においては，$p \in j(U)$ を「オラクル j を用いて，アルゴリズム p を用いて問題 U を解ける」と読む．より正確には，以下の概念を考えよう．

定義 13.4. 部分多価関数 $g\colon\subseteq \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$ が与えられたとき，$j^1_g\colon\subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を以下のように定義する．

$$p \in j^1_g(U) \iff p \text{ は } g \text{ から } \mathsf{k}U \text{ を計算するクエリ 1 回の対話ゲームの必勝戦略である．}$$

ここで，$\mathsf{k}U$ は，何を入力しても U を出力する定数関数を意味する．探索問題としては，何を問われても，U の何らかの解を探索せよ，という問題である．上記の定義は，p が $\mathsf{k}U$ の g へのワイラオホ還元を与えることを意味している．

命題 13.5. 任意の部分多価関数 $g\colon\subseteq\mathbb{N}\rightrightarrows\mathbb{N}$ に対して，内的単調性 $\forall x,y.\ (x\rightharpoonup y)\rightharpoonup(j^1_g(x)\rightharpoonup j^1_g(y))$ が実現可能である．

Proof. (スケッチ) $x\rightharpoonup y$ の解 a と g から $\mathsf{k}U$ を計算する 1 クエリ戦略 $b\in j^1_g(x)$ が与えられているとする．この戦略の出力は (Halt,c) の形で，$c\in x$ ならば $a*c\in y$ である．したがって，この b の最終出力を $(\mathsf{Halt},a*c)$ に変えた戦略 d を考えれば，$d\in j^1_g(y)$ であり，$b\mapsto d$ は明らかに計算可能である． □

実際，部分多価関数（探索問題）からの 1 クエリ相対的計算と，内的単調性の実現可能性はかなり正確な意味で一致する．ただし，完全な一致を得るためには，$\mathbb{N}$ 上の多価関数よりも少し一般的な概念を考える必要がある．これまでに様々な数学的対象の数化（コード化）を経由して計算論を展開したが，この数化の概念をもう少し一般化した多価数化あるいはアセンブリ (assembly) と呼ばれる概念がある．実は，多価数化集合の探索問題まで話を広げると，1 クエリ相対的計算と，内的単調性の実現可能性が同一のものであることが導かれる．

しかし，これはあくまで内的単調性のみの話であり，上昇性や冪等性は計算論的にどのように理解できるだろうか．先程の定義 j^1_g は正確に 1 クエリを投げる相対的計算を表すものであったが，クエリを投げない計算も認めてよいのではないだろうか．

定義 13.6. 部分多価関数 $g\colon\subseteq\mathbb{N}\rightrightarrows\mathbb{N}$ が与えられたとき，$j^{\leqslant 1}_g\colon\subseteq\mathfrak{P}(\mathbb{N})\to\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を以下のように定義する．

$$p\in j^{\leqslant 1}_g(U)\iff p\text{ は }g\text{ から }\mathsf{k}U\text{ を計算するクエリ高々 1 回の対話ゲームの必勝戦略である．}$$

つまり，クエリ 0 でもよいか否か，という点が $j^{\leqslant 1}_g$ と j^1_g の差異である．

命題 13.7. 任意の部分多価関数 $g\colon\subseteq\mathbb{N}\rightrightarrows\mathbb{N}$ に対して，$j^{\leqslant 1}_g$ に対する内的単調性と上昇性が実現可能である．

Proof. (スケッチ) 内的単調性については先程と同様なので，上昇性について示す．これについては，$a\in x$ に対して，クエリなしで (Halt,a) を出力する戦略 b を考えれば，これが $x\rightharpoonup j^{\leqslant 1}_g(x)$ を実現する． □

先程と同様，多価数化集合の探索問題まで話を広げると，高々 1 クエリ相対的計算と，内的単調性および上昇性の実現可能性が同一のものであることを導くことが可能である．残るは，冪等性の計算論的理解のみである．ここまでの相対的計算では，オラクルへ投げるクエリが高々 1 つであったが，標準的な相対的計算では，有限的計算中で何度もクエリを投げることが可能であるということが多いだろう．これを反映するものが，以下の写像である．

定義 13.8. 部分多価関数 $g\colon\subseteq\mathbb{N}\rightrightarrows\mathbb{N}$ が与えられたとき，$j_g\colon\subseteq\mathfrak{P}(\mathbb{N})\to\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ を以下のように定義する．

$$p\in j_g(U)\iff p\text{ は }g\text{ から }\mathsf{k}U\text{ を計算する対話ゲームの必勝戦略である．}$$

対話ゲームの戦略が出力を返す際には，対話ゲームは有限ラウンドで終了するから，クエリは有限回しか投げられないことに注意しよう．

定理 13.9. 任意の部分多価関数 $g\colon\subseteq \mathbb{N} \rightrightarrows \mathbb{N}$ に対して，j_g に対する内的単調性，上昇性および冪等性が実現可能である．すなわち，j_g は（実効トポス上の）ローヴェア-ティアニー位相である．

そして，ここまでと同様に，多価数化集合上の探索問題に話を広げることにより，オラクル相対的計算の概念と LT 位相の概念が正確に結び付くのである．

§ 14. 付録 A: 位相空間論

14.1. 距離空間の位相

■距離: 数学にはしばしば距離の概念が現れる．たとえば，数直線上の点 $x, x' \in \mathbb{R}$ の間の距離は $|x - x'|$ であり，平面上の点 $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ の間の距離は，三平方の定理より $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ である．正確には，これらはユークリッド距離と呼ばれるものである．実関数 $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ の間の距離を考えることも多々あり，具体例としては，たとえば，f と g の間の距離を $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ によって定義するというものがある．

計算論で重要なものは，全域関数 $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の間の距離である．我々は汎関数の計算において，全域関数 f を順に $f(0), f(1), f(2), \dots$ と読み込んでいった．関数 f, g の値を入力 0 から順に読み込んだとき，なかなか違いが見つからないならば「f と g の距離は近い」と考え，すぐに違いが見つかるならば「f と g の距離は遠い」と考える．たとえば，入力 n まで読み込んだときに初めて違いが見つかったとき，f と g の距離は 2^{-n} としてもよい．より一般的な設定では，全域関数の間の距離を以下のように定義する．

例 14.1 (全域関数の間の距離)**.** 0 に漸近する単調減少関数 $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を固定する．このとき，f と g の間の距離 $d(f, g)$ を以下のように定義する．

$$d(f, g) = h(\min\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\})$$

大抵の文脈では $h(n) = 2^{-n}$ を考えるが，$h(n) = (n+1)^{-1}$ 等を考えても，本稿で扱う理論においては特に影響はない．この距離は，上で紹介した実関数の間の距離とはアイデアが大きく異なることに注意しよう．このため，収束などの性質も大幅に異なる．

■収束: 点列 x_n が x に収束するとは，x_n が x に任意に近づくことである．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ について，x から距離 ε の範囲内に，ある番号 N 以降ずっと入り続けることである．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n \geqslant N)\ d(x, x_n) < \varepsilon.$$

例 14.2 (離散距離における収束)**.** 自然数 $a, b \in \mathbb{N}$ の間の距離を $|a - b|$ によって定義する．このとき，自然数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束することと，有限個を除くすべての n について $a_n = a$ が成立することは同値である．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \exists N \forall n \geqslant N.\ a_n = a.$$

例 14.2 の距離の下では，自然数の全域関数の収束は各点収束によって特徴づけることができる．

命題 14.3. 例 *14.2* における距離の下で自然数上の全域関数の列 $(f_t)_{t\in\mathbb{N}}$ が f に収束することと，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $(f_t(n))_{n\in\mathbb{N}}$ が $f(n)$ に収束することは同値である．

$$\lim_{t\to\infty} f_t = f \iff \forall n \in \mathbb{N}.\ \lim_{t\to\infty} f_t(n) = f(n)$$

Proof. ($\Rightarrow$) 与えられた n に対して，$\varepsilon = h(n)$ に対する N を取ると，任意の $t \geqslant N$ について，$d(f, f_t) < h(n)$ を満たす．例 14.2 の距離の定義より，任意の $k \leqslant n$ に対して $f(k) = f_t(k)$ が成立する．特に，任意の $t \geqslant N$ に対して，$f(n) = f_t(n)$ なので，例 14.1 で見たように，これは $\lim_{t\to\infty} f_t(n) = f(n)$ を導く．

(⇐) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，例 14.1 の式より，ある N_n が存在して，任意の $t \geqslant N_n$ に対して，$f_t(n) = f(n)$ である．与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，$h(m) \leqslant \varepsilon$ となる m を取り，$N = \max_{n \leqslant m} N_n$ を考える．このとき，任意の $t \geqslant N$ および $n \leqslant m$ について $f_t(n) = f(n)$ であるから，例 14.2 の距離の定義より，$d(f_t, f) \leqslant h(m+1) < h(m) < \varepsilon$ が成立する． □

これはあくまで例 14.2 の距離の持つ特性であり，一般的には，関数列の収束と各点収束は異なる概念であることに注意する．

■連続性: 関数 f に対して「入力を任意に近似可能ならば出力も任意に近似可能である」という性質について考えよう．この性質の定式化の方向性としては，たとえば以下の 2 種類のものがあり得る．

(1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が x の近似列ならば，$(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ が $f(x)$ の近似列である

(2) 出力 $f(x)$ のどんな精度の近似も，入力 x のある近似から求めることができる．

いま，関数 $f\colon X \to Y$ の入力たち $x, x' \in X$ の間の距離 $d_X(x, x')$ や出力たち $y, y' \in Y$ の間の距離 $d_Y(x, x')$ が定まっているとすれば，この 2 つの性質は，以下のように定式化できる．

定義 14.4. 関数 f が点 x において**列連続** (*sequentially continuous*) とは，以下の条件を満たすことである．

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

関数 f が点 x において**連続** (*continuous*) とは，以下の条件を満たすことである．

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x'\ [d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon].$$

列連続性は上記のアイデア (1) を定式化したものであり，連続性はアイデア (2)，つまり，出力の ε-近似は入力の δ-近似から求められる，という性質を表したものである．

観察 14.5 (全域関数空間における連続性)**.** 関数 $\Phi\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が列連続であることと，ある単調関数 $\varphi\colon \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ が存在して，任意の $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対して，ある $\sigma \sqsubset g$ が存在して，$\Phi(g) = \varphi(\sigma)$ となることは同値である．

Proof. (⇒) $\varphi(\sigma) = \Phi(\sigma 0^\infty)$ と定義する．$g_n = (g \upharpoonright n)0^\infty$ とすると，$\lim_{n\to\infty} g_n = g$ であるから，列連続性より，$\lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) = \Phi(g)$ である．このとき，十分大きな n に対して $\Phi(g_n) = \Phi(g)$ であるから，特に $\varphi(g \upharpoonright n) = \Phi(g)$ である．

(⇐) g への収束列 (g_n) が与えられているとする．このとき，ある $\sigma \sqsubset g$ について，$\Phi(g) = \varphi(\sigma)$ となる．いま，十分大きな n について，$d(g, g_n) < h(|\sigma|)$ であるから，$\sigma \sqsubset g_n$ である．よって，$\Phi(g_n) = \varphi(\sigma) = \Phi(g)$ を得るから，$\lim_{n\to\infty} \Phi(g_n) = \Phi(g)$ である． □

命題 14.6. 連続性と列連続性は同値である．

Proof. (⇒) f が連続であり，x への収束列 (x_n) が与えられているとする．このとき，与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，連続性の条件を満たす $\delta > 0$ を取る．十分大きな任意の n について，$d_X(x_n, x) < \delta$ であるから，

$d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ を得る．したがって，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ である．

($\Leftarrow$) f が連続でないと仮定し，連続性を満たさない $\varepsilon > 0$ を取る．$(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を 0 に収束する下降列とする．仮定より，$d_X(x, x_n) < \delta_n$ だが $d_Y(f(x), f(x_n)) \geqslant \varepsilon$ となる x_n が存在する．このとき明らかに $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であるが，$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は $f(x)$ には収束しない．したがって，f は列連続ではない． □

距離を持たない空間に対する連続性と列連続性の概念の一般化もあり，距離を持たない場合には，連続性と列連続性は必ずしも一致しない．

■開集合: 連続性の定義について再考しよう．いま，x の δ-近似全体の集合を $B_\delta(x)$ と書くことにしよう．つまり，$B_\delta(x) = \{x' : d_X(x, x') < \delta\}$ である．これを中心 x, 半径 δ の開球 (open ball) と呼ぶことにしよう．これはしばしば x の δ-近傍と呼ばれることもある．このとき，連続性に関する式は以下で表される．

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x'\, [x' \in B_\delta(x) \implies f(x') \in B_\varepsilon(f(x))]$$

分かりやすいようにもう少し抽象的に書くと，以下のような式と対応しそうである．

$$\forall B \ni f(x)\, \exists B' \ni x\, \forall x'\, [x' \in B' \implies f(x') \in B]$$

ここで, B, B' は開球である．$f^{-1}[B] = \{x' : f(x') \in B\}$ であったことに注意すれば, 上記式は $B' \subseteq f^{-1}[B]$ のように書き換えられる．

観察 14.7. f が連続であることと，任意の開球 B に対して，$x \in f^{-1}[B]$ ならば，ある開球 B' が存在して，$x \in B' \subseteq f^{-1}[B]$ となることは同値である．

Proof. ($\Rightarrow$) 開球 B があるとき，$f(x) \in B$ ならば，ある $\varepsilon > 0$ について $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq B$ である．もし f が連続ならば，ある $\delta > 0$ について，$x' \in B_\delta(x)$ は $f(x') \in B$ を導く．したがって，$B' = B_\delta(x)$ を考えればよい．

($\Leftarrow$) $B = B_\varepsilon(f(x))$ とする．このとき，$x \in f^{-1}[B]$ なので，仮定より $x \in B' \subseteq f^{-1}[B]$ となる開球 B' が存在する．このとき，$x \in B_\delta(x) \subseteq B'$ となる $\delta > 0$ を取ればよい． □

観測 14.7 における $f^{-1}[B]$ の持つ性質を抽出すると，以下のようなものである．

定義 14.8. 集合 $A \subseteq X$ が**開** (*open*) であるとは，任意の $x \in A$ に対して，ある開球 B で $x \in B \subseteq A$ となるものが存在することである．

したがって，f が連続であることと，任意の開球 B に対して $f^{-1}[B]$ が開であることは同値である．

観察 14.9. 集合 $A \subseteq X$ が開であることと，A が開球の和で書けることは同値である．

Proof. ($\Rightarrow$) 仮定より，任意の $x \in A$ に対して，ある開球 B_x が存在して，$x \in B_x \subseteq A$ と書ける．したがって，$A = \bigcup_{x\in A} B_x$ である．

($\Leftarrow$) $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ ならば，任意の $x \in A$ に対して，ある $i \in I$ が存在して，$x \in B_i$ である．B_i は開球であり，$x \in B_i \subseteq A$ を満たすから，A は開である． □

観察 14.10. 関数 f が連続であることと，任意の開集合 A に対して $f^{-1}[A]$ が開集合であることは同値である．

Proof. 観察 14.9 より，$A = \bigcup_{i\in I} A_i$ と書くことができ，$f^{-1}[A] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$ である．観察 14.7 より，各 $f^{-1}[A_i]$ は開集合である．したがって，$f^{-1}[A]$ は開集合の和であるが，観察 14.9 より，これはつまり開球の和の和であり，よって，開集合である． □

本稿では，観察 14.9 の特徴付けの方を主に用いるため，この性質によって開集合の定義を与え直しておこう．

定義 14.11. 集合 $A \subseteq X$ が**開集合** (*open set*) であるとは，$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ となる開集合たちの族 $(A_i)_{i \in I}$ が存在することである．

14.2. 関数空間の位相

位相空間 X, Y に関する重要な問題は，X から Y への連続関数全体の集合 $C(X,Y)$ 上に良い位相が入るか否かである．これに関しては，指数位相 (exponential topology) と呼ばれるものが特に重要である (see e.g. [?]).

定義 14.12. $C(X,Y)$ 上の**指数位相** (*exponential topology*) とは，$f\colon Z \times X \to Y$ の連続性とそのカリー化 $\lambda f\colon Z \to C(X,Y)$ の連続性が同値となるものである．ここで，$(\lambda f)(z)\colon x \mapsto f(z,x)$ である．

位相空間 X が**指数化可能** (*exponentiable*) とは，任意の位相空間 Y に対して，$C(X,Y)$ 上の指数位相が存在することを指す．もし $C(X,Y)$ に指数位相が備わっているときは，単に Y^X と書くことにする．

シエルピンスキ空間を $\mathbb{S}$ と書く．これは開点 $\top$ と閉点 $\bot$ を持つ空間である．つまり，$\mathbb{S}$ の開集合は，$\varnothing, \{\top\}, \{\top, \bot\}$ である．空間 $\mathbb{S}$ を用いると，様々な位相的概念を関数的に取り扱うことが可能になる．たとえば，位相空間 X について，以下の性質が成り立つことは容易に確認できる．

(1) 集合 $A \subseteq X$ が開である $\iff$ 特性写像 $\chi_A\colon X \to \mathbb{S}$ は連続である．
(2) X がハウスドルフである $\iff$ $\neq\colon X \times X \to \mathbb{S}$ が連続であることは同値である．
(3) X が T_1 である $\iff$ 任意の $x \in X$ について，$\neq_x\colon X \to \mathbb{S}$ は連続である．ここで，$\neq_x(y)$ は $x \neq y$ の真理値である．

ここで，開点 $\top$ は「真」と解釈され，閉点 $\bot$ は「偽」と解釈される．大雑把に言えば，最初の性質 (1) は，シエルピンスキ空間が「開部分対象分類子」のようなものであることを意味する．部分集合と特性写像を同一視することにより，もし X が指数化可能ならば，X の開部分集合のなす超空間 $\mathcal{O}(X)$ は，指数空間 $\mathbb{S}^X$ によって定義できる．

$$\mathcal{O}(X) := \mathbb{S}^X.$$

同様の方法で，閉集合の超空間 $\mathcal{A}(X)$ を定義することもできる．以降，記号の濫用を行い，しばしば $\chi_A(x)$ のことを $A(x)$ と書く．

観察 14.13. X と Y を指数化可能空間とする．このとき，$f\colon X \to Y$ が連続であることと $f^{-1}\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ が連続であることは同値である．

コンパクト性の非自明な特徴付けもある．

事実 14.14. X を指数化可能空間とする．このとき，$A \subseteq X$ がコンパクトであることと $\forall_A\colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ が連続であることは同値である．ここで，$\forall_A(U)$ は $A \subseteq U$ の真理値である．

この事実は，$\mathcal{O}(X)$ 上の指数位相がスコット位相と一致し，さらに，A がコンパクトであることと $\{U \in \mathcal{O}(X) : A \subseteq U\}$ がスコット開であることが同値であることから導かれる．

もし X が指数化可能ならば，点 $x \in X$ の近傍フィルター $\eta_X(x) = \{U \in \mathcal{O}(X) : x \in U\}$ は，単なる評価写像 $\mathsf{eval}_x = \lambda U.U(x) \colon \mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ であり，これは連続である．さらに，もし $\mathcal{O}(X)$ が指数化可能ならば，$\eta_X \colon X \to \mathcal{O}\mathcal{O}(X)$ は評価写像のカリー化 $\lambda x.\lambda U.U(x)$ であり，これも連続である．位相空間 X が T_0 とは，2 つの異なる点が異なる近傍フィルターを持つ，つまり，η_X が単射であることを意味する．指数化可能性の仮定より，任意の点 $x \in X$ はその近傍フィルター $\eta_X(x)$ から以下の意味で復元できる．

観察 14.15. もし $\mathcal{O}(X)$ が指数化可能ならば，X が T_0 であることと $\eta_X \colon X \to \mathcal{O}\mathcal{O}(X)$ が連続な部分左逆を持つことは同値である．

Proof. 上で言及したように，X が T_0 であることと，$\eta_X^-(\mathsf{eval}_x) = x$ となる関数 $\eta_X^- \colon\subseteq \mathcal{O}\mathcal{O}(X) \to X$ が存在することは同値である．そのような η_X^- が必ず連続であることを示せば十分である．つまり，もし $U \subseteq X$ が開ならば，$(\eta_X^-)^{-1}[U] \subseteq \mathcal{O}\mathcal{O}(X)$ も η_X^- の定義域内で開であることを示す．まず，逆像 $(\eta_X^-)^{-1}[U]$ は写像 $U \circ \eta_X^- \colon\subseteq \mathcal{O}\mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ と同一視できる．いま，評価写像 $\mathsf{eval} \colon \mathcal{O}\mathcal{O}(X) \times \mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ を考えよう．このとき，$\mathsf{eval}(\mathsf{eval}_x, U) = U(x) = U \circ \eta_X^-(\mathsf{eval}_x)$ を得る．これより，$U \circ \eta_X^-$ は連続写像 $\lambda e.\mathsf{eval}(e, U) \colon \mathcal{O}\mathcal{O}(X) \to \mathbb{S}$ の η_X^- の定義域への制限である． □

指数化可能性の完全な特徴付けも既に知られている．

事実 14.16 (see [?])**.** 位相空間が指数化可能であることとコアコンパクト *(core-compact)* であることは同値である．

指数化可能空間 X の指数空間 Y^X は必ずしも指数化可能であるとは限らない．特に，指数化可能空間と連続関数の圏はカルテジアン閉ではない．この困難を克服するためのアイデアは，指数化可能空間によって，別の空間を「表示」することである．このために必要なものは，コアコンパクト生成 (core-compactly generated) 空間の概念である．ここでは定義の詳細には踏み入らないが，以下のような特徴付けがあることは知られている．

事実 14.17. 位相空間がコアコンパクト生成であることと指数化可能空間の商であることは同値である．

この概念は，位相空間のいわゆる convenient category として知られるコンパクト生成空間の圏から抜け落ちていた重要な数々の対象を補完するものとなっている．任意のコンパクト生成空間はコアコンパクト生成である．ハウスドルフ空間がコンパクト生成であることとコアコンパクト生成であることは同値である．しかし，極めて重要で必須の空間である，$\mathbb{S}, \mathcal{O}(X), \mathcal{O}\mathcal{O}(X)$ のような非ハウスドルフ空間が，コアコンパクト生成空間では補完されている．

事実 14.18. コアコンパクト生成空間と連続関数の圏はカルテジアン閉である．

専門用語を用いれば，コアコンパクト生成空間の圏は，指数化可能空間の圏の coreflective hull である．

§ 15. 付録 B: ハイティング値集合論

15.1. ハイティング値関数

■ハイティング値 n 項関係: Ω-集合の射を考えるにあたって重要な考え方は，Ω-集合の概念を通常の集合のハイティング値版であると考え，「ハイティング値集合論」として Ω-集合の理論を展開することである．たとえば，まずは n 項関係の概念のハイティング値版について考えよう．通常の集合の文脈において，R が n 項関係であるとき，以下の条件が成立する．

- (部分) $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$.
- (代入) $R(s_1, \ldots, s_n) \wedge (s_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (s_n = t_n) \implies R(t_1, \ldots, t_n)$.

代入規則は，関係と等号に関する性質である．n 項関係のハイティング値版については，Ω 値 n 項関係

$$R\colon X_1 \times X_n \to \Omega$$

を考えるのが妥当であろう．しかし，各 X_i はただの集合ではなく，Ω-集合 $(X_i, \sim_i)$ である場合を考えたい．この場合，存在述語 $\mathbf{E}_i x = (x \sim_i x)$ を帰属度と考えれば，各 X_i はファジー集合 $(X_i, \mathbf{E}_i)$ でもある．もう一点，注目しておくと，Ω-値 n 項関係 R は，n 項ファジー集合 $(X_1 \times \cdots \times X_n, R)$ とみなすこともできる．つまり，$R(x_1, \ldots, x_n)$ を組 $(x_1, \ldots . x_n)$ の $X_1 \times \cdots \times X_n$ への帰属度であると考えることも可能である．このとき，部分性は以下のファジー集合の間のモノ

$$(X_1 \times X_n, R) \rightarrowtail (X_1, \mathbf{E}_1) \times \cdots \times (X_n, \mathbf{E}_n)$$

を表すと考えることができる．ファジー集合の間の射は，上進写像としていたから，具体的には以下のように記述できる．

- (部分) $R(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \mathbf{E}_1 x_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{E}_n x_n = (x_1 \sim_1 x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \sim_n x_n)$.

代入規則の Ω-値版については，そのまま直接的に Ω-値に置き換えるだけである．

- (代入) $R(x_1, \ldots, x_n) \wedge (x_1 \sim_1 y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \sim_n y_n) \leqslant R(y_1, \ldots, y_n)$.

以上の部分性と代入性を満たす Ω 値 n 項関係のことを **n 項 Ω-関係** (*n-ary Ω-relation*) と呼ぶことにする．

■ハイティング値関数的関係: さて，つづいては，関数あるいは写像の定義について考えよう．通常の集合の文脈において，関数 $f\colon X \to Y$ とは，対応関係 $x \mapsto_f y$ である．つまり，対応関係 $\mapsto_f \subseteq X \times Y$ という 2 項関係を関数の本体であると考える．正確には，ただの 2 項関係ではなく，集合的議論においては，

X から Y への関数とは，全域一価 2 項関係 $R \subseteq X \times Y$ である．

ここで，全域性 (total) と一価性 (single-valued) は以下の性質のことを指す．

- (全域) $x \in X \implies (\exists y \in Y)\ (x, y) \in R$.
- (一価) $[(x, y) \in R \ \wedge\ (x, y') \in R] \implies y = y'$.

いま，Ω-集合を考えているので，これを Ω-値関係 $R\colon X \times Y \to \Omega$ に拡張しよう．

定義 15.1. Ω-集合 $(X, \sim_X)$ から $(Y, \sim_Y)$ への**関数的 Ω-関係** (*functional Ω-relation*) とは，以下の性質を満たす写像 $\mapsto\colon X \times Y \to \Omega$ である．

$$\begin{array}{ll} \text{部分性:} & (x \mapsto y) \leqslant (x \sim_X x) \wedge (y \sim_Y y) \\ \text{代入性:} & (x \mapsto y) \wedge (x \sim_X x') \wedge (y \sim_Y y') \leqslant (x' \mapsto y') \\ \text{一価性:} & (x \mapsto y) \wedge (x \mapsto y') \leqslant (y \sim_Y y') \\ \text{全域性:} & (x \sim_X x) \leqslant \bigvee_{y \in Y} (x \mapsto y) \end{array}$$

しばしば関数的 Ω-関係のことを単に関数的関係と呼ぶ．ちなみに部分性の $(x \mapsto y) \leqslant (y \sim_Y y)$ は一価性から導かれるので，部分性は $(x \mapsto y) \leqslant (x \sim_X x)$ に置き換えても問題ない．関数的関係の定義から全域性を除いたものを，しばしば**部分関数的関係** (*partial functional relation*) と呼ぶ．

例 15.2. Ω-集合 X 上の関係 $\mapsto_{\mathrm{id}}\colon X \times X \to \Omega$ を $(x \mapsto_{\mathrm{id}} y) = (x \sim_X y)$ によって定義する．これが関数的関係になっていることは容易に確認できる．この $\mapsto_{\mathrm{id}}$ を恒等関数的関係と呼ぶ．

ところで, 通常の 2 値集合論において, 関数 $f, g\colon A \to B$ のグラフ $G_f, G_g \subseteq A \times B$ について, $G_f \subseteq G_g$ ならば，$f = g$ であるが導かれる．同様の性質は, Ω-値集合論でも成立する．2 つの関数的関係 $\mapsto_f, \mapsto_g\colon A \times B \to \Omega$ について，$\mapsto_f \leqslant \mapsto_g$ であるとは，任意の $x \in A$ と $y \in B$ について，$(x \mapsto_f y) \leqslant (x \mapsto_g y)$ が成立することを意味する．2 値集合論と同様に，複数の関数的関係が同値であることを示すためには，これだけ示せばよい．

補題 15.3. Ω-集合 A, B 上の Ω 値 2 項関係 $\mapsto_f, \mapsto_g\colon A \times B \to \Omega$ について，$\mapsto_f$ は関数的関係であり，$\mapsto_g$ は部分関数的関係であるとする．このとき，以下が成立する．

$$\mapsto_f \leqslant \mapsto_g \quad\iff\quad \mapsto_f = \mapsto_g.$$

Proof. $\mapsto_f \leqslant \mapsto_g$ を仮定して $\mapsto_g \leqslant \mapsto_f$ も導けることを示せば十分である．仮定の下で，$(x \mapsto_g y) \leqslant (x \mapsto_f y)$ を示せばよい．このとき，次の式変形の流れを考える．

$$\dfrac{\dfrac{x \mapsto_g y}{x \sim x}\,(\text{部分})}{\bigvee_{y' \in B}(x \mapsto_f y')}\,(\text{全域}) \qquad\qquad \dfrac{x \mapsto_f y' \qquad \dfrac{x \mapsto_g y \qquad \dfrac{x \mapsto_f y'}{x \mapsto_g y'}\,(\text{仮定})}{y \sim y'}\,(\text{一価})}{x \mapsto_f y}\,(\text{代入})$$

ここで，(上式)⩽(下式) という順序の流れになっている．上図の左部は $(x \mapsto_g y) \leqslant \bigvee_{y' \in B}(x \mapsto_f y')$ を導く流れであり，右部は $(x \mapsto_g y) \wedge (x \mapsto_f y') \leqslant (x \mapsto_f y)$ を導く流れである．よって，$\bigvee$ の規則より，

$$(x \mapsto_g y) \leqslant (x \mapsto_g y) \wedge \bigvee_{y' \in B} (x \mapsto_f y') \leqslant (x \mapsto_f y)$$

が導かれる．以上より，目的の式を得た． □

■関数的関係の合成: 我々は Ω-集合の射の概念を求めていた．しかし，射には，合成の概念が求められる．関数的関係の合成とは一体何であろうか．まず，通常の 2 値集合論において，写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$

の合成 $g \circ f$ がどのように与えられているかを考えると，実は 2 つの方法がある．

$$g \circ f(x) = z \iff (\exists y \in Y)\,[f(x) = y \ \wedge\ g(y) = z],$$
$$g \circ f(x) = z \iff (\forall y \in Y)\,[f(x) = y \ \rightarrow\ g(y) = z].$$

前者は存在型の式であり，後者は全称型の式である．写像の合成が存在型でも全称型でも表せるというのは重要な点である．Ω-値集合論の文脈では，上限型と下限型の合成の定義があり，両方の定義を上手く使い分けていくことになる．

まずは，“上限型合成” の定義から与えよう．関数的関係 $\mapsto_f : X \times Y \to \Omega$ と $\mapsto_g : Y \times Z \to \Omega$ の合成 $\mapsto_f ; \mapsto_g : X \times Z \to \Omega$ を以下のように定義する．

$$(x \mapsto_f ; \mapsto_g z) \iff \bigvee_{y \in Y} \big((x \mapsto_f y) \wedge (y \mapsto_g z)\big).$$

これが関数的関係であることを確認するのは難しくない．

観察 15.4. $\mapsto_f ; \mapsto_g : X \times Z \to \Omega$ は関数的関係である．

Proof. 部分性と代入性については明らかである．一価性については，以下の流れで不等式を求める．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{x \mapsto_f y \qquad x \mapsto_f y'}{y \sim y'}\,(\text{一価}) \qquad y' \mapsto_g z'}{y \mapsto_g z'}\,(\text{代入}) \qquad y \mapsto_g z}{z \sim z'}\,(\text{一価})$$

$$\therefore \quad (x \mapsto_f y) \wedge (y \mapsto_g z) \wedge (x \mapsto_f y') \wedge (y' \mapsto_g z') \leqslant (z \sim z').$$

ここで，（上式）$\leqslant$（下式）という順序の流れであり，右下の不等式がこの演繹の結果である．このとき，$\bigvee$ の規則より，

$$\begin{aligned}&(x \mapsto_f ; \mapsto_g z) \wedge (x \mapsto_f ; \mapsto_g z')\\ \leqslant\ &\bigvee_{y \in Y} (x \mapsto_f y) \wedge (y \mapsto_g z) \wedge \bigvee_{y' \in Y} (x \mapsto_f y') \wedge (y' \mapsto_g z') \leqslant (z \sim z')\end{aligned}$$

を得る．次に，全域性であるが，左の不等号から順に，$\mapsto_f$ の全域性，部分性，$\mapsto_g$ の全域性を用いて，

$$(x \sim x) \leqslant \bigvee_{y \in Y} (x \mapsto_f y) \qquad\qquad (x \mapsto_f y) \leqslant (y \sim y) \leqslant \bigvee_{z \in Z} (y \mapsto_g z)$$

となる．右の不等式については，$(x \mapsto_f y) \leqslant (x \mapsto_f y) \wedge \bigvee_{z \in Z} (x \mapsto_g z)$ が得られることに注意すれば，分配法則を用いて，

$$\begin{aligned}(x \sim x) &\leqslant \bigvee_{y \in Y} \left((x \mapsto_f y) \wedge \bigvee_{z \in Y} (y \mapsto_g z) \right)\\ &= \bigvee_{z \in Z} \bigvee_{y \in Y} \big((x \mapsto_f y) \wedge (y \mapsto_g z)\big) = \bigvee_{z \in Z} (x \mapsto_f ; \mapsto_g z)\end{aligned}$$

を得る．よって，主張は示された． □

次に，“下限型合成” の定義も与えておこう．ただし，2 値集合論における定義をそのまま採用すると，関数的関係とならない場合があるので，少し修正を加える．任意の関数的関係 $\mapsto_f : X \times Y \to \Omega$ と $\mapsto_g : Y \times Z \to \Omega$ の合成 $\mapsto_f {}^{\star} \mapsto_g : X \times Z \to \Omega$ を以下のように定義する．

$$(x \mapsto_f {}^{\star} \mapsto_g z) := (x \sim x) \wedge \bigwedge_{y \in Y} ((x \mapsto_f y) \Rightarrow (y \mapsto_g z)).$$

関数的関係の合成の 2 つの定義が同値であることを示すことができるが，本稿では用いないので，証明は省略する．ともあれ，関数的関係の合成の概念が定義されたため，関数的関係は Ω-集合の射と呼ぶに足り得るものであることがわかった．したがって，

Ω-集合 X から Y への射 (morphism) とは，X から Y への関数的 Ω-関係のことである

と宣言しよう．ただし，混乱を避けるために，関数的関係 $\mapsto$ に対する射は，$[\mapsto]$ という記号によって表すことにする．形式的には，Ω-集合 A から B への射 $[\mapsto]\colon A \to B$ とは，関数的関係 $\mapsto\colon A \times B \to \Omega$ のことを指す．例 15.2 の恒等関数的関係 $[\mapsto_{\mathrm{id}}]$ に対応する射のことをしばしば単に id と書く．射上の 2 項演算 $\circ$ を $g \circ f = [\mapsto_f; \mapsto_g]$ によって定義し，これを射の合成と呼ぶ．

注意． 圏の言葉に慣れていない人に注意すると，射 $f\colon A \to B$ のように書かれていても，A の元を B の元に移す写像があることを意味しない．射 $f\colon A \to B$ という記法は，A と B の間に特定の関連性があるとき，

A と B という 2 つの記号の間に f というラベルの付いた有向辺 $A \xrightarrow{f} B$ を形式的に引く

という以上の何者でもない．たとえば，Ω-集合であれば，関数的関係 $\mapsto\colon A \times B \to \Omega$ がある場合には，グラフの頂点 A と B の間に $[\mapsto]$ というラベルの付いた有向辺 $A \xrightarrow{[\mapsto]} B$ を引くことにする，と宣言したということである．

■モノと部分対象： さて，写像の単射性に対応するものは，射のモノ性である．これは単射性の定義を単に Ω 値にしたものである．

定義 15.5. Ω-集合 A から B への射 $\mapsto$ が**モノ** (*mono*) であるとは，次の条件を満たすことである．

$$\text{単射性:}\quad (x \mapsto y) \wedge (x' \mapsto y) \leqslant (x \sim x').$$

モノ射の同値類のことをしばしば部分対象 (subobject) と呼ぶ．ただし，やはりモノ射の像に注目するのが便利である．モノ射 $\mapsto_m$ の像とは，B 上の部分同値関係 $\sim$ を強めて，次の部分同値関係 $\sim_m$ を与えた Ω-集合 $(B, \sim_m)$ である．

$$(y \sim_m y') = (y \sim y') \wedge \bigvee_{x \in A} (x \mapsto_m y).$$

台集合上の恒等写像 $\mathrm{id}\colon (B, \sim_m) \to (B, \sim)$ は，$\mathbf{E}$ を保つ外延的写像であるから，命題**??**より，$(B, \sim_m)$ から $(B, \sim)$ への射 $[\mapsto_i]$ を与える．具体的には，$(x \mapsto_i y) = (x \sim_m x) \wedge (x \sim y)$ である．これが単射性を満たすことも確認できる．よって，$(B, \sim_m)$ は $(B, \sim)$ の部分対象である．

ところで，2 値集合の文脈では，部分集合 $A \subseteq B$ と特性関数 $\chi_A\colon B \to \{0, 1\}$ をしばしば同一視するが，同様に，Ω 値の文脈でも，部分対象 $A \rightarrowtail B$ と何らかの関係 $\chi_A\colon B \to \Omega$ を対応させておくと便利である．ここでは，$R(y) := \bigvee_{x \in A} (x \mapsto_m y)$ と定義すると，これは単項 Ω-関係になっている．つまり，以下の性質を満たす．

$$\begin{aligned} \text{部分性:}\quad & R(y) \leqslant (y \sim y), \\ \text{代入性:}\quad & R(y) \wedge (y \sim y') \leqslant R(y'). \end{aligned}$$

逆に，単項 Ω-関係 $R\colon B \to \Omega$ が与えられたとき，B 上の関係 $\sim$ を強めて，次の部分同値関係 $\sim_R$ を与えた Ω-集合 $(B, \sim_R)$ を考えることができる．

$$(y \sim_R y') = (y \sim y') \wedge R(y).$$

恒等写像 $\mathrm{id}\colon (B,\sim_R)\to(B,\sim)$ は，$\mathbf{E}$ を保つ外延的写像であり，上と同様の理由によって，これはモノ射を与える．以上をまとめると，

- Ω-集合 $(B,\sim)$ へのモノ射 $A\rightarrowtail B$
- Ω-集合 $(B,\sim)$ の部分同値関係を制限して得られる部分対象 $(B,\sim_m)\rightarrowtail B$
- Ω-集合 $(B,\sim)$ 上の単項 Ω-関係 $R\colon B\to\Omega$

はいずれも同じものとみなせる．通常の集合の言語では，集合 B の部分集合は集合 B 上の関係と同一視できたが，Ω-集合の場合には，部分対象は単項 Ω-関係と同一視できるということである．

15.2. 前層とハイティング値集合

それでは，前層から Ω-集合の構成 F と Ω-集合から前層の構成 G が互いに逆構成であるか，という問題に立ち返ろう．構成 F と G は，$\Omega=\mathcal{O}(P)$ の場合にしか意味をなさないから，この節では，常に $\Omega=\mathcal{O}(P)$ であるとする．

$$[P^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]\underset{\mathsf{G}}{\overset{\mathsf{F}}{\rightleftarrows}}\Omega\text{-}\mathbf{Set}$$

■構成 FG: 既に観測 11.7 において，前層 A について $\mathsf{GF}A\simeq A$ となることは確認しているが，それでは Ω-集合 B について $\mathsf{FG}B\simeq B$ は成立しているだろうか．$\mathsf{FG}B$ がどのような Ω-集合であったかを思い出す必要があるが，その前に，記述が冗長になるので，$\mathsf{FG}B$ の台集合の元 $(p,[x]_p)$ のことを単に $[x]_p$ と書いてしまうことにする．すると，第 11 節の最後の方のパラグラフを参考にすれば，$\mathsf{FG}B$ は以下のように簡潔に表せる．

$$|\mathsf{FG}B|=\{[x]_p : p\in(x\sim_B x)\},\qquad\qquad ([x]_p\sim_{\mathsf{FG}B}[y]_q)=(x\sim_B y)\cap{\downarrow}p\cap{\downarrow}q.$$

命題 15.6. 任意の Ω-集合 B に対して，$\mathsf{FG}B\simeq B$ である．

Proof. 射 $[\mapsto]\colon B\to\mathsf{FG}B$ を定義するために，Ω-値関係 $\mapsto\colon B\times\mathsf{FG}B\to\Omega$ を以下によって定義する．

$$(x\mapsto[y]_p)=(x\sim_B y)\cap{\downarrow}p.$$

まず，これが Ω-関係であることを示そう．部分性については，$(x\mapsto[y]_p)\subseteq(x\sim x)$ は明らかであり，同様に，以下が成立する．

$$(x\mapsto[y]_p)\subseteq(x\sim y)\cap{\downarrow}p\subseteq(y\sim y)\cap{\downarrow}p=([y]_p\cap[y]_p).$$

代入性については，$\sim$ の推移性より，以下が成立する．

$$\begin{aligned}(x\mapsto[y]_p)\wedge(x\sim x')\wedge([y]_p\sim[y']_q)&=(x\sim y)\cap{\downarrow}p\cap(x\sim x')\cap(y\sim y')\cap{\downarrow}p\cap{\downarrow}q\\&\subseteq(x'\sim y')\cap{\downarrow}p\cap{\downarrow}q\subseteq(x'\mapsto[y']_q).\end{aligned}$$

次に，$\mapsto$ が関数的関係になっていることを示す．一価性については，$\sim_B$ の推移性と $\sim_{\mathsf{FG}B}$ の定義から導かれる．

$$(x\mapsto[y]_p)\cap(x\mapsto[y']_q)=(x\sim y)\cap(x\sim y')\cap{\downarrow}p\cap{\downarrow}q\subseteq(y\sim y')\cap{\downarrow}p\cap{\downarrow}q\subseteq([y]_p\sim[y']_q).$$

全域性については，$p \in (x \sim x)$ ならば，$p \in (x \sim x) \cap {\downarrow}p = (x \mapsto [x]_p)$ であるから，$p \in \bigcup_y (x \mapsto y)$ が成立しているので，全域性 $(x \sim x) \subseteq \bigcup_y (x \mapsto y)$ を得る．以上より，$\mapsto$ が B から $\mathsf{FG}B$ への関数的関係であることが示された．

次に，この逆関係 $\mapsto'\colon \mathsf{FG}B \to B$ を $([y]_p \mapsto' x) = (x \mapsto [y]_p)$ によって定義する．これは Ω-関係 $\mapsto$ の逆関係であるから，$\mapsto'$ もまた Ω-関係である．つまり，部分性と代入性については成立する．逆関係 $\mapsto'$ もまた関数的関係であることを示そう．一価性については，$\sim_B$ の推移性より，以下のように得る．

$$([y]_p \mapsto' x) \cap ([y]_p \mapsto' x') = (x \sim y) \cap (x' \sim y) \cap {\downarrow}p \subseteq (x \sim x').$$

全域性については，$\sim_{\mathsf{FG}B}$ の定義より，以下のように得られる．

$$([y]_p \sim [y]_p) = (y \sim y) \cap {\downarrow}p = ([y]_p \mapsto' y) \subseteq \bigcup_x ([y]_p \mapsto' x).$$

したがって，$\mapsto'$ もまた関数的関係であることを確認できた．最後に，この 2 つの関係を合成すると恒等関数的関係になることを示そう．まず，$\sim_B$ の推移律と式 (11.1) より，

$$\begin{aligned}([y]_p \mapsto'; \mapsto [y']_q) \supseteq ([y]_p \mapsto' y \mapsto [y']_q) &= (y \sim y) \cap {\downarrow}p \cap (y \sim y') \cap {\downarrow}q \\ &= (y \sim y') \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q = ([y]_p \sim [y']_q) = ([y]_p \mapsto_{\mathrm{id}} [y']_q)\end{aligned}$$

であるから，補題 15.3 より $\mapsto'; \mapsto \; = \; \mapsto_{\mathrm{id}}$ が導かれる．つづいて，$p \in (x \mapsto_{\mathrm{id}} x')$ ならば，$p \in (x \sim x')$ であるから，

$$\begin{aligned}p \in (x \sim x') \cap {\downarrow}p &= (x \mapsto [x]_p) \cap ([x]_p \mapsto' x') \\ &\subseteq \bigcup_y (x \mapsto y) \cap (y \mapsto' x') = (x \mapsto; \mapsto' x')\end{aligned}$$

を得る．よって，補題 15.3 より $\mapsto; \mapsto' \; = \; \mapsto_{\mathrm{id}}$ が導かれる．以上より，$[\mapsto']$ が $[\mapsto]$ の逆射であることが導かれ，$\mathsf{FG}B \simeq B$ を得た． □

観測 11.7 と命題 15.6 を合わせて，構成 F と G が逆構成であることが示された．この対応は，様相論理の文脈では，クリプキ前層意味論と等号付きクリプキ意味論の対応として知られている．

$$\text{クリプキ前層意味論 } [P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \quad \simeq \quad \text{等号付きクリプキ意味論 } \Omega\text{-}\mathbf{Set}$$

さて，ここまででは，構成 F と G とは対象を対象に変換するものと見てきた．しかし，対象の変換を行ったならば，射の変換も行いたい．前層の射はどのように Ω-集合の射に変換されるか，そして Ω-集合の射はどのように前層の射に変換されるか，についてこれから見ていこう．

■構成 F 再考: まず，前層から決定される Ω-集合において，前層の射はどのようなものに見えるか分析してみよう．前層 A から得られる Ω-集合 $\mathsf{F}A$ の台集合は $|\mathsf{F}A| = \sum_{p \in P} A_p$ であったから，写像 $f_p\colon A_p \to B_p$ の族は明らかに写像 $|f|\colon \mathsf{F}A \to \mathsf{F}B$ を決定する．具体的には，$x \in A_p$ であることは $\mathbf{E}x = p$ であったことを思い出せば，$|f|(x) = f_{\mathbf{E}x}(x)$ と定義すればよい．混乱を招く恐れのない場合には，記号を濫用して，この $|f|$ のことを単に f と書いてしまうことにする．このとき，以下のようにして，前層の射から常に Ω-集合上の関数的関係を得ることができる．

命題 15.7. A と B を半順序 P 上の前層であり，$f\colon A \to B$ を前層の射であるとする．このとき，

$$(x \mapsto_f y) := (x \sim_{\mathsf{F}A} x) \wedge (f(x) \sim_{\mathsf{F}B} y)$$

と定義すると，$\mapsto_f$ は $\mathsf{F}A$ から $\mathsf{F}B$ への関数的関係である．

Proof. まず，台集合上の写像 f について，$f(x) = f_{\mathbf{E}x}(x) \in B_{\mathbf{E}x}$ なので，$\mathbf{E}(f(x)) = \mathbf{E}x$ であることが従う．次に，f に関する代入規則 $(x \sim_{\mathsf{F}A} y) \leqslant (f(x) \sim_{\mathsf{F}B} f(y))$ が成立することを示そう．同値関係 $\sim_{\mathsf{F}A}$ と $\sim_{\mathsf{F}B}$ の定義を思い出せば，以下を示せばよい．

$$\{p \leqslant \mathbf{E}x, \mathbf{E}y : x|_p = y|_p\} \subseteq \{p \leqslant \mathbf{E}x, \mathbf{E}y : f(x)|_p = f(y)|_p\}$$

いま，$x|_p = y|_p$ ならば $f_p(x|_p) = f_p(y|_p)$ であるから，もし $p \leqslant \mathbf{E}x, \mathbf{E}y$ ならば，前層の射（自然変換）の性質より，以下を得る．

$$f(x)|_p = f_{\mathbf{E}x}(x)|_p = f_p(x|_p) = f_p(y|_p) = f_{\mathbf{E}y}(y)|_p = f(y)|_p.$$

よって，f に関する代入規則が示された．f に関する以上の性質を用いて，$\mapsto_f$ が関数的関係であることを示そう．以下，同値関係の添字は省略する．部分性については，定義 11.3 の直後の式 (11.1) と f の $\mathbf{E}$-保存性より，

$$(x \mapsto_f y) \leqslant (f(x) \sim y) \leqslant (f(x) \sim f(x)) = \mathbf{E}(f(x)) = \mathbf{E}x$$

を得る．一価性については，推移律より，

$$(x \mapsto_f y) \wedge (x \mapsto_f y') = (f(x) \sim y) \wedge (f(x) \sim y') \leqslant (y \sim y')$$

が従う．全域性については，f が $\mathbf{E}$ を保存することから，

$$(x \sim x) = \mathbf{E}x = \mathbf{E}(f(x)) = (f(x) \sim f(x)) = (x \mapsto_f f(x)) \leqslant \bigvee_{y \in Y} (x \mapsto_f y)$$

となる．実際，$\mathbf{E}x \leqslant \mathbf{E}(f(x))$ という条件があれば十分である．代入性については，2 つに分解して考える．まず，終域側の代入性については，推移律より，

$$(x \mapsto_f y) \wedge (y \sim y') = (f(x) \sim y) \wedge (y \sim y') \leqslant (f(x) \sim y') = (x \mapsto y')$$

である．始域側の代入性については，推移律と f に関する代入規則より，

$$\begin{aligned}(x \mapsto_f y) \wedge (x \sim x') &= (f(x) \sim y) \wedge (x \sim x') \\ &\leqslant (f(x) \sim y) \wedge (f(x) \sim f(x')) \leqslant (f(x') \sim y) = (x' \mapsto_f y).\end{aligned}$$

この 2 つの代入性を合わせれば，関数的関係の代入性の条件を満たす．以上より，主張は示された．　□

この関数的関係 $\mapsto_f$ について，$\mathsf{F}f = [\mapsto_f]$ と書くことにしよう．つまり，構成 F は，単に前層 A を Ω-集合 $\mathsf{F}A$ に変換するだけでなく，前層の射 $f\colon A \to B$ を Ω-集合の射 $\mathsf{F}f\colon \mathsf{F}A \to \mathsf{F}B$ に変換しているものだと考えられる．さらに，この変換 F について，以下の性質が成り立っていることは容易に確かめられる．

$$\mathsf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathsf{F}A}, \qquad \mathsf{F}g \circ \mathsf{F}f = \mathsf{F}(g \circ f).$$

圏の言葉を用いれば，F は P 上の前層の圏から Ω-集合の圏への関手であるということである．

■構成 G 再考: 逆に，Ω-集合の射は，どのような前層の射へと変換されるだろうか．Ω-集合から前層の構成 G について思い出すと，まず Ω-集合 $(A,\sim)$ から同値関係の族 $(A_p,\sim_p)_{p\in P}$ を作り，その商の族 $(A_p/{\sim_p})_{p\in P}$ として前層を得るというものであった．以下のようにして，Ω-集合上の関数的関係から常に前層の射を得ることができる．

命題 15.8. A と B を Ω-集合であり，$[\mapsto]\colon A\to B$ を Ω-集合の射であるとする．このとき，$f_p\colon A_p/{\sim_p}\to B_p/{\sim_p}$ を以下のように定義する．

$$f_p([x]_p)=\{y\in B_p : p\in(x\mapsto y)\}.$$

このとき，任意の $y\in f_p([x]_p)$ に対して $f_p([x]_p)=[y]_p$ が成り立ち，さらに $f=(f_p)_{p\in P}$ は前層 GA から GB への射である．

Proof. まず，f_p が矛盾なく定義されていること，つまり $[x]_p=[x']_p$ ならば $f([x]_p)=f([x']_p)$ であることを示す．これについては，以下の推論から従う．

$$\dfrac{\dfrac{[x]_p=[x']_p}{p\in(x\sim x')}\ (\text{定義})\qquad \dfrac{y\in f([x]_p)}{p\in(x\mapsto y)}\ (\text{定義})}{\dfrac{p\in(x'\mapsto y)}{y\in f([x']_p)}\ (\text{定義})}\ (\text{代入})$$

$$\therefore\quad [x]_p=[x']_p \text{ and } y\in f([x]_p)\implies y\in f([x']_p).$$

次に，$f_p([x]_p)$ が空でないことを示す．$x\in A_p$ は $p\in(x\sim x)$ を意味するから，$\mapsto$ の全域性より，

$$p\in(x\sim x)\subseteq\bigcup_{y\in B}(x\mapsto y)$$

であることから，$f_p([x]_p)$ は空でない．次に，任意の $y\in f_p([x]_p)$ に対して，$f_p([x]_p)=[y]_p$ であることは，以下の 2 つの推論から従う．

$$\dfrac{\dfrac{y\in f_p([x]_p)}{p\in(x\mapsto y)}\ (\text{定義})\qquad \dfrac{y'\in f_p([x]_p)}{p\in(x\mapsto y')}\ (\text{定義})}{p\in(y\sim y')}\ (\text{一価})\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{y\in f_p([x]_p)}{p\in(x\mapsto y)}\ (\text{定義})\qquad p\in(y\sim y')}{p\in(x\mapsto y')}\ (\text{代入})$$

最後に，f が前層の射であることを確認する．まず，$q\leqslant p$ について，$f_q([x]_p|_q)=f_q([x]_q)$ であるから，$y\in f_q([x]_p|_q)$ は $q\in(x\mapsto y)$ を意味する．次に，上記の性質より，

$$y\in f_p([x]_p)|_q\iff(\exists y'\in f_p([x]_p))\ y\in[y']_p|_q\iff(\forall y'\in f_p([x]_p))\ y\in[y']_p|_q$$

が成立している．ここで，$y\in[y']_p|_q=[y']_q$ であるから，さらに式変形すれば，

$$\begin{aligned} y\in f_p([x]_p)|_q&\iff(\exists y'\in A_p)\ [p\in(x\mapsto y')\text{ and }q\in(y\sim y')]\\ &\iff(\forall y'\in A_p)\ [p\in(x\mapsto y')\text{ implies }q\in(y\sim y')]\end{aligned}$$

を得る．存在型の特徴付け，$(x \mapsto y')$ が下方集合であること，および $\mapsto$ の代入性より，特に $y \in f_p([x]_p)|_q$ は $q \in (x \mapsto y)$ を導く．これは $f_p([x]_p)|_q \subseteq f_q([x]_p|_q)$ を意味する．逆に，$q \in (x \mapsto y)$ を仮定する．$p \in (x \mapsto y')$ となる $y' \in A_p$ が与えられているとする．$(x \mapsto y')$ は下方集合であるから，$\mapsto$ の一意性より，$q \in (y \sim y')$ を得る．上記の全称型の特徴付けより，これは $f_q([x]_p|_q) \subseteq f_p([x]_p)|_q$ を導く．よって，f が前層の射であることが示された．$\square$

命題 15.8 より，Ω-集合の射 $[\mapsto]$ から前層の射 f を得られたが，これについて $\mathsf{G}[\mapsto] = f$ と書くことにしよう．つまり，構成 G は，単に Ω-集合 A を前層 $\mathsf{G}A$ に変換するだけでなく，Ω-集合の射 $[\mapsto]\colon A \to B$ を前層の射 $\mathsf{G}[\mapsto]\colon \mathsf{G}A \to \mathsf{G}B$ に変換する．さらに，この変換 G について，以下の性質が成り立っていることは容易に確かめられる．

$$\mathsf{G}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathsf{G}A}, \qquad\qquad \mathsf{G}[\mapsto_g] \circ \mathsf{G}[\mapsto_f] = \mathsf{G}([\mapsto_g] \circ [\mapsto_f]).$$

圏の言葉を用いれば，G は Ω-集合の圏から P 上の前層の圏への関手であるということである．

■圏同値: 観測 11.7 と命題 15.6 で証明した同型性 $\mathsf{GF}A \simeq A$ および $\mathsf{FG}B \simeq B$ は，F と G が対象の間の逆構成になっていることを表す．ここからは，F と G が射の変換としても良い振る舞いをすることを示そう．具体的には，同型射 $\eta_A\colon A \to \mathsf{GF}A$ と $\varepsilon_A\colon \mathsf{FG}B \to B$ が以下の図式を可換にすることを示そう．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[d, "\eta_B"] \\ \mathsf{GF}A \arrow[r, "\mathsf{GF}f"'] & \mathsf{GF}B \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "{[\mapsto]}"] & B \\ \mathsf{FG}A \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[r, "{\mathsf{FG}[\mapsto]}"'] & \mathsf{FG}B \arrow[u, "\varepsilon_B"'] \end{tikzcd}$$

圏の用語を用いれば，左の図式は，$\eta = (\eta_A\colon A \to \mathsf{GF}A)_{A \in \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}}$ が自然変換 (natural transformation) であることを意味し，右の図式は，$\varepsilon = (\varepsilon_B\colon \mathsf{FG}B \to B)_{B \in \Omega\text{-}\mathbf{Set}}$ が自然変換であることを意味する．各成分が同型であるような自然変換は，自然同型 (natural isomorphism) と呼ばれるので，上の図式は，η と ε が共に自然同型であることを意味する．

命題 15.9. 同型射の族 $\eta = (\eta_A\colon A \to \mathsf{GF}A)_{A \in \mathbf{Set}^{P^{\mathrm{op}}}}$ は自然同型である．つまり，前層の射 $f\colon A \to B$ に対して，$\eta_B \circ f = \mathsf{GF}f \circ \eta_A$ が成立する．

Proof. まず，$\mathsf{GF}A$ が何であったかを思い出すと，$\mathsf{GF}A_p = A_{\geqslant p}/{\sim_{\mathsf{F}A,p}}$ であった．ここで，$A_{\geqslant p} = \sum_{q \geqslant p} A_q$ であり，$p \in x \sim_{\mathsf{F}A,p} y$ であることは $x|_p = y|_p$ であることと同値である．$\mathsf{GF}B$ についても同様である．次に，$\mathsf{GF}f$ を具体的に記述すると，各 $x \in A_{\geqslant p}$ に対して，

$$\mathsf{GF}f_p([x]_p) = \{y \in \mathsf{GF}B_p : p \in (x \mapsto_f y)\}$$

となる．ところで，$f_{\mathbf{Ex}}(x)|_p = f_p(x|_p)$ であるから，

$$p \in (x \sim_{\mathsf{F}A} x) \cap (f_{\mathbf{Ex}}(x) \sim_{\mathsf{F}B} f_p(x|_p)) = (x \mapsto_f f_p(x|_p))$$

を得る．これは $f_p(x|_p) \in \mathsf{GF}f_p([x]_p)$ を意味する．よって，命題 15.8 より，$\mathsf{GF}f_p([x]_p) = [f_p(x|_p)]_p$ である．したがって，観測 11.7 の証明において $\eta_{A,p}(x) = [x]_p$ としていたことを思い出せば，各 $x \in A_p$ に対して，

$$\eta_{B,p} \circ f_p(x) = [f_p(x)]_p = \mathsf{GF}f_p([x]_p) = \mathsf{GF}f_p \circ \eta_{A,p}(x)$$

であるから，目的の主張が示された． □

命題 15.10. 同型射の族 $\varepsilon = (\varepsilon_B \colon \mathsf{FG}B \to B)_{B\in\Omega\text{-}\mathbf{Set}}$ は自然同型である．つまり，Ω-集合の射 $[\mapsto]\colon A \to B$ に対して，$[\mapsto] \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \mathsf{FG}[\mapsto]$ が成立する．

Proof. まず，$\mathsf{FG}B$ が何であったかを再び書き下しておく．

$$|\mathsf{FG}B| = \{[x]_p : p \in (x \sim_B x)\}, \qquad ([x]_p \sim_{\mathsf{FG}B} [y]_q) = (x \sim_B y) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q.$$

$\mathsf{FG}A$ についても同様である．次に，$[\mapsto^*] := \mathsf{FG}[\mapsto]$ の具体的な記述を与えよう．先に答えを述べておけば，以下が成立することを示せる．

$$([x]_p \mapsto^* [y]_q) = (x \mapsto y) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q. \tag{15.1}$$

これを確かめるために，少しずつ計算していくと，$g = \mathsf{G}[\mapsto]$ と定義すれば，

$$([x]_p \mapsto^* [y]_q) = ([x]_p \sim [x]_p) \cap (g([x]_p) \sim_{\mathsf{FG}B} [y]_q)$$

となる．いま，$([x]_p \sim [x]_p) = {\downarrow}p$ である．また，命題 15.8 より，任意の $z \in g([x]_p)$ に対して，$g([x]_p) = [z]_p$ であるから，

$$([x]_p \mapsto^* [y]_q) = ([x]_p \sim [x]_p) \cap ([z]_p \sim_{\mathsf{FG}B} [y]_q) = (y \sim_B z) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q$$

を得る．いま，$z \in g([x]_p)$ より $p \in (x \mapsto z)$ が成立し，$(x \mapsto z)$ は下方集合であるから，任意の $r \leqslant p$ に対して $r \in (x \mapsto z)$ である．したがって，任意の $r \leqslant p$ に対して，

$$(x \mapsto z) \wedge (y \sim_B z) = (x \mapsto z) \wedge (x \mapsto y)$$

を得る．ここで，$\leqslant$ は代入性より従い，$\geqslant$ は一価性より従う．よって，目的の等式 (15.1) を得た．

いま，命題 15.6 の証明を思い出すと，同型射 $\varepsilon_A \colon \mathsf{FG}A \to A$ を表す関数的関係 $\mapsto_\varepsilon$ は，

$$([x]_p \mapsto_\varepsilon y) = (x \sim y) \cap {\downarrow}p$$

によって与えられていた．残るは，2 つの関数合成の同値性を証明すればよい．

$$([x]_p \mapsto_\varepsilon ; \mapsto y) = \bigcup_{z\in|A|} ([x]_p \mapsto_\varepsilon z) \cap (z \mapsto y) = \bigcup_{z\in|A|} (x \sim z) \cap (z \mapsto y) \cap {\downarrow}p$$
$$([x]_p \mapsto^* ; \mapsto_\varepsilon y) = \bigcup_{[z]_q\in|\mathsf{FG}B|} ([x]_p \mapsto^* [z]_q) \cap ([z]_q \mapsto_\varepsilon y) = \bigcup_{[z]_q\in|\mathsf{FG}B|} (x \mapsto z) \cap (z \sim y) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q$$

となることを計算できるので，部分性と代入性を用いると，

$$\begin{aligned}([x]_p \mapsto^* ; \mapsto_\varepsilon y) &\subseteq (x \mapsto z) \cap (z \sim y) \cap {\downarrow}p \cap {\downarrow}q \\ &\subseteq (x \sim x) \cap (x \mapsto y) \cap {\downarrow}p \subseteq ([x]_p \mapsto_\varepsilon ; \mapsto y)\end{aligned}$$

よって，補題 15.3 より，$\mapsto^* ; \mapsto_\varepsilon = \mapsto_\varepsilon ; \mapsto$ を得る． □

圏の言葉を用いて，ここまでに示した結果を整理しよう．

定義 15.11. 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が**同値** (*equivalent*) とは，関手 $\mathsf{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $\mathsf{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在し，さらに自然同型 $\eta = (\eta_A \colon A \simeq \mathsf{GF}A)_{A\in\mathcal{C}}$ と $\varepsilon = (\varepsilon_B \colon \mathsf{FG}B \simeq B)_{B\in\mathcal{D}}$ が存在することを意味する．

したがって，我々が示したことは，半順序 P 上の前層の圏 $[\mathbf{P}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ と $\mathcal{O}(P)$-集合の圏 $\mathcal{O}(P)$-$\mathbf{Set}$ が圏同値であるということである．

$$[P^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}] \underset{\mathsf{G}}{\overset{\mathsf{F}}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}(P)\text{-}\mathbf{Set}$$

この節で議論していたのは $\Omega = \mathcal{O}(P)$ の場合であるが，一般のハイティング代数 Ω においても類似の性質を示すことができる．ただし，一般のハイティング代数 Ω の場合には，その源泉となる半順序 P が存在しないため，工夫が必要である．アイデアとしては，ハイティング代数 Ω は半順序でもあるから，Ω 上の前層の圏と $\mathcal{O}(\Omega)$-集合の圏が同値であることは示せる．ところで，Ω が最初からハイティング代数であれば，Ω と $\mathcal{O}(\Omega)$ はかなり近い性質を持つ．したがって，Ω 上の前層と $\mathcal{O}(\Omega)$-集合を対応付けるのではなく，Ω 上の前層と Ω-集合を対応付けられないかと考える．残念ながらこれはうまく行かないので，補正が必要である．Ω と $\mathcal{O}(\Omega)$ の橋渡しを行う鍵は，被覆と貼り合わせである．貼り合わせのアイデアを用いると，「Ω 上の（標準被覆系に対する）層」というものと「完備 Ω-集合」というものに対応が付くことを示すことができる．