数理情報学 10 / 算術的階層パート *

木原 貴行
名古屋大学 情報学部・情報学研究科

最終更新日: 2021 年 1 月 25 日

目次

* 本講義ノートは，2020 年度秋 2 期開講の名古屋大学情報学部における講義「数理情報学 10」の内容のうち，算術的階層の部分をまとめたものである．講義のページ： http://www.math.mi.i.nagoya-u.ac.jp/~kihara/teach.html

§ 1. 算術的階層

1.1. 存在の難しさ

計算理論および数学において，なぜ計算不可能性が遍在するか．その答えは，「存在 $\exists$」 あるいはその双対をなす概念である「任意 $\forall$」にある．世の中には，様々な計算不可能な決定問題がある．停止問題 Halt をはじめとして，文字列書換系の到達可能性問題 $\mathsf{Reach}_{\to,v}$, モノイドの語の問題 $\mathsf{WP}_{\langle A|R\rangle}$, ポストの対応問題 PCP_k, 行列のモータリティ問題 MM_m（これらの決定問題については，「2017 年度 計算可能性理論特論 講義ノート」を見よ）はいずれも何らかの「存在」を問う．たとえば，到達可能性問題は，

「与えられた u に対して，u から v に辿り着くルート $u \to u_1 \to \cdots \to v$ は**存在**するか」

という問題と言い換えられるし，行列のモータリティ問題は，

「与えられた 3×3 行列 $A_1, A_2, \dots, A_m$ を用いて，積が零行列になる組合せは**存在**するか」

という問題と言い換えられる．なぜ,「存在」を問う問題は，難しいのか.

例 1.1. 以下の問題 $\mathrm{Cube}(n)$ を考えよう．

「$x^3 + y^3 + z^3 = n$ となる整数 x, y, z は存在するか」

まず，$n = 33$ の場合を例に挙げよう．つまり，$x^3 + y^3 + z^3 = 33$ の解であるが，この整数解 (x, y, z) は 2018 年の段階では発見されていなかった．たとえば，コンピュータで x, y, z を -10000 から 10000 くらいの範囲で探索してみれば，その範囲内に $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ の解が存在しないことは分かるだろう．さすがに 33 という小さな値に関する方程式であるから，± 10000 の範囲で解が存在しなければ，もう解が存在しないと言い切ってしまっていいのではないだろうか……と思うかもしれないが，実は，この解は 2019 年に発見された．

$$(8866128975287528)^3 + (-8778405442862239)^3 + (-2736111468807040)^3 = 33$$

つまり，おおよそ 9000 兆の値の周辺で，初めて解が存在することが判明したのである．したがって，10000 程度の値で解が存在しないことが分かったとしても，解が存在しないか否かなんて全く予想が付くものではない．このように 9000 兆周辺で解が見つかることもあるのである．しかも，このような例は枚挙に暇がない.

具体的には，$n = 42$ の場合も，そのような例である．つまり，$x^3 + y^3 + z^3 = 42$ の解であるが，この整数解 (x, y, z) は 2019 年の段階では発見されていなかった．今度は $n = 33$ の場合の反省も兼ねて，x, y, z を -9000 兆から 9000 兆くらいの範囲で探索してみよう．しかし，その範囲内に $x^3 + y^3 + z^3 = 42$ の解が存在しないことがわかる．さすがに 42 という小さな値に関する方程式であるから，± 9000 兆の範囲で解が存在しなければ，もう解が存在しないと言い切ってしまっていいのではないだろうか……と思うかもしれないが，実は，この解は 2020 年に発見された.

$$(-80538738812075974)^3 + (80435758145817515)^3 + (12602123297335631)^3 = 42$$

つまり，おおよそ 8 京の値の周辺で，初めて解が存在することが示されたのである．

$\mathrm{Cube}(n)$ における存在判定の困難さは，整数全体から解を探索するという点にある．$n = 33$ だからといって，解の探索範囲を ± 10000 の範囲に絞ってはならないし，$n = 42$ だからといって，解の探索範囲を ± 9000 兆の範囲に絞ってはならない．つまり，解の探索領域を有限に絞ることができず，無限の領域から解を探索しなければならない．無限の領域からの解の探索は，解が存在するときは有限ステップで計算が終了するが，解が存在しないときは無限に計算が終了しない．つまり，愚直な解探索を行った場合，有限ステップの手続きでは「解が存在しない」と断言することはいつまで経ってもできない．これが，「存在」に関する問題の難しさである．

とはいえ，存在の探索領域が無限であるような問題が常に計算不可能だというわけではない．存在の探索領域が無限であっても，計算可能な判定問題は無尽蔵にある．

例 1.2. 以下の問題 $\mathrm{Fermat}(n)$ を考えよう．

「$x^n + y^n = z^n$ となる自然数 x, y, z は存在するか」

$n = 2$ の場合は，$(x, y, z) = (3, 4, 5)$ が存在の証拠となる．このように，存在を示す場合には，存在の証拠を突き付けてやればよい．しかし，もし解が存在しなかった場合は，どうすればよいだろうか．実際，$n \geqslant 3$ の場合には，自然数解 (x, y, z) は存在しないことが知られており，これはいわゆるフェルマーの最終定理（ワイルズの定理）である．つまり，上の問題 $\mathrm{Fermat}(n)$ については，

$$n \leqslant 2 \implies \textbf{YES} \qquad\qquad n \geqslant 3 \implies \textbf{NO}$$

という答えを知っているから，$n \leqslant 2$ と $n \geqslant 3$ のどちらになるかを判定するアルゴリズムによって，$\mathrm{Fermat}(n)$ の判定が可能である．つまり，$\mathrm{Fermat}(n)$ は計算可能である．計算可能性証明がとてつもなく難しいだけであって，これは計算可能である．

それでは，「存在について尋ねる問題」という概念の厳密な定式化を与えよう．

定義 1.3. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が Σ_1 とは，ある計算可能集合 $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について，次が成立することである．

$$A = \{n \in \mathbb{N} : (\exists s \in \mathbb{N})\ (n, s) \in B\}.$$

同値な定義であるが，自然数に関する述語 A が Σ_1 であるとは，真偽判定が計算可能なある 2 変数述語 B を用いて，次のように書けることである：任意の $n \in \mathbb{N}$ について，

$$A(n) \iff \exists s\ B(n, s).$$

ちなみに，存在の否定は，任意であるから，

$$\neg A(n) \iff \neg \exists s\ B(n, s) \iff \forall s\ \neg B(n, s)$$

となる．Σ_1 述語の否定として書ける述語のことを Π_1 述語と呼ぶ．計算可能述語このような「存在」を尋ねる問題は Σ_1 であると呼ばれる．

注意. 計算量理論においては，Σ_1 は RE と呼ばれ，Π_1 は coRE と呼ばれる．

注意. 一応注意しておけば，たとえ有限領域内の探索であったとしても，現実的には探索は困難であることが多い．たとえば，文字列 σ の長さを $|\sigma|$ と書くことにして，多項式時間計算可能な述語 B と多項式 p について，次のような述語を考えよう．

$$A(n) \iff \big(\exists s:\ |s| \leqslant p(|n|)\big)\ B(n,s).$$

つまり，存在の探索範囲が，長さ $p(|n|)$ 以下の文字列全体となる．しかし，記号の種類が k 種類であるとすれば，長さ $p(|n|)$ の文字列は $2^{p(|n|)}$ 種類存在する．つまり，探索範囲が指数サイズになってしまい，結果として，多項式時間で探索が終わることが保証されない．このように書ける述語のことを，計算量理論では NP と呼ぶ．NP のことを Σ_1^{P} と書き，coNP のことを Π_1^{P} と書くこともある．

1.2. Σ_1 定義可能性

■停止問題: Σ_1 定義可能な集合の代表例は，チューリングマシン M の停止問題である．

$$\mathsf{Halt}_M = \{n \in \mathbb{N} : \{\!\{M\}\!\}(n)\downarrow\}$$

一般に，部分計算可能関数 $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の定義域のことを，f の**停止問題**または**停止集合**と呼ぶ．

$$\mathsf{Halt}_f := \{n \in \mathbb{N} : f(n)\downarrow\}$$

部分計算可能関数の特性としては，関数に計算ステップの概念が付随していることである．つまり，原始再帰関数 $\tilde{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ が存在し，$\tilde{f}(n,s)$ のことを $f(n)$ の時刻 s での計算状況と考える．そうすると，停止問題は，以下のように，存在型の式として表せることは明らかであろう．

$$f(n)\downarrow \iff (\exists s \in \mathbb{N})\ \tilde{f}(n,s) \in \mathbb{N}.$$

■計算的可算性: 空でない集合 A が**可算**であるとは，$A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のように自然数で数え上げられることであった．言い換えれば，$\mathbb{N}$ からの全射が存在することである．空な集合にも統一的な定義を与えたいときは，可算とは，ある $D \subseteq \mathbb{N}$ からの全射が存在することとすればよい．あるいは同値な定義であるが，部分関数 $f :\subseteq \mathbb{N} \to X$ の像となっていることである．

この可算性の概念に計算的な観点を入れよう．空でない集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が**計算的可算** (*computably enumerable*) である[*1]とは，ある計算可能数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ となることであ

[*1] 計算的可算の別の訳語として，計算的枚挙可能という用語が用いられることもある．重要概念であるにも関わらず，用語が文献によってまばらであり，帰納的可算/再帰的可算 (recursively enumerable)，実効的に枚挙可能 (effectively enumerable)，認識可能 (reconigzable)，半決定可能 (semidecidable) などとも呼ばれる．計算量クラス RE は，このうち再帰的可算 (recursively enumerable) の頭文字である．

る．同じことであるが，集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算的可算であるとは，ある部分計算可能関数 $f \colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の像となることである．

$$a \in A \iff (\exists n \in \mathbb{N})\ f(n) \downarrow= a.$$

■下半計算可能性: 部分関数 $f \colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が**下半計算可能** (*lower semicomputable*) とは，計算可能関数 $f_s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の単調増大列 $(f_s)_{s\in\mathbb{N}}$ の各点極限として f が書けることである．

$$f_0(n) \leqslant f_1(n) \leqslant f_2(n) \leqslant \cdots \to \lim_{s\to\infty} f_s(n) = f(n).$$

もし上半計算可能関数 f が 2 値関数である場合（特に，集合の特性関数である場合）には，以下の存在式で表せる．

$$f(n) = 1 \iff (\exists s \in \mathbb{N})\ f_s(n) = 1.$$

さて，停止問題の決定不可能性など，よく知られる様々な決定不可能定理は，単に計算不可能な問題の存在を示しているという以上の情報を含んでいる．実際，計算可能な関数の存在を示すというだけであれば，万能チューリング機械の議論などは全くもって不必要である．たとえば，高々可算個のチューリング機械しか存在しない一方，関数 $Q : \Sigma^* \to \{0,1\}$ は非可算個存在するという点に注目すればよい．それでは，停止問題の決定不可能性から得られるが，濃度に関する議論からは決して得られない情報とは何であるだろうか．それは，停止問題 Halt が Σ_1 であるという点にある．よって，停止問題の決定不可能性の結論として，以下を得る．

系 1.4. 計算不可能だが Σ_1 集合が存在する．

Σ_1 定義可能性と関連する例として，停止集合，計算的可算性，下半計算可能性を挙げたが，実はいずれもすべて同値である．

命題 1.5. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，以下の条件は全て同値となる．

1. A は Σ_1 集合である．
2. A は停止集合である，つまり，ある部分計算可能関数 $f \colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の定義域である．
3. A は計算的可算である，つまり，部分計算可能関数 $f \colon\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の像である．
4. A は下半計算可能である．

Proof. (1)⇒(2): A が Σ_1 ならば，対応する計算可能集合 $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を持つ．このとき，入力 n に対して，部分計算可能関数 f を表すプログラム P_f は順に

$$(n,0) \in B? \quad (n,1) \in B? \quad (n,2) \in B? \quad \ldots$$

を判定していく．$(n,s) \in B$ なる $s \in \mathbb{N}$ が見つかったときに限りプログラム P_f は停止する．このとき，

$$f(n) \downarrow \iff (\exists s \in \mathbb{N})\ (n,s) \in B \iff n \in A$$

であるから，つまり，A は f の停止集合である．

(2)⇒(3): 続いて，A を停止集合であるとすると，ある部分計算可能関数 f が存在して，$n \in A$ と $f(n)\downarrow$ が同値になる．いま，$f_s(n)$ を $f(n)$ の計算の第 s ステップでの状況を表すものとする．このとき，

$$p(n,s) = \begin{cases} n & \text{if } f_n(s)\downarrow \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する．関数 $(n,s) \mapsto f_s(n)$ は計算可能であるから，p は計算可能である．この p の像が A となることは，以下により示される．

$$n \in A \iff f(n)\downarrow \iff (\exists s)\, f_s(n)\downarrow \iff (\exists s)\, p(n,s) = n \iff (\exists a,b)\, p(a,b) = n.$$

以上より，A が計算的可算集合であることが示された．

(3)⇒(4): $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算的可算であるならば，A はある部分計算可能関数 f の像になる．$f(n)$ の計算の第 s ステップでの状況を $f_s(n)$ と表す．このとき，

$$\varphi(n,s) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\exists x \leqslant s)\, f_s(x) = n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする．$f(0), f(1), \dots, f(s)$ の計算をそれぞれ s ステップだけシミュレートすれば $\varphi(n,s)$ の値を求められるので，φ は計算可能である．このとき，明らかに $n \in A$ であることと $\lim_n \varphi(n,s) = 1$ であることは同値である．また，$\varphi(n,s) = 0$ であり，変心 1 回であることも明らかである．したがって，A は下半計算可能である．

(4)⇒(1): もし A が下半計算可能ならば，φ をその推測関数とする．このとき，

$$n \in A \iff (\exists s \in \mathbb{N})\, \varphi(n,s) = 1$$

であることは容易に確認できる．したがって，A は Σ_1 である． □

MRDP 定理（「2017 年度 計算可能性理論特論 講義ノート」を見よ）を用いれば，Σ_1 集合というものは，

言語 $\{+, \cdot, =, 0, 1\}$ 上の一階述語論理式で全称量化 $\forall$ を使わずに定義できる $\mathbb{N}$ の部分集合

として特徴づけられる．言い換えれば，「算術の言語を用いて，存在型の式で定義できる集合」が Σ_1 集合である．実際，Σ_1 集合は通常，言語 $\{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$ 上の述語論理式で非有界全称量化 $\forall$ を使わずに定義できる $\mathbb{N}$ の部分集合として定義されることが多い．つまり，Σ_1 集合とは，アプリオリには計算可能性概念を伴わないものであるが，それが計算可能性理論の根幹をなす概念となるのである．

1.3. Δ_1 定義可能性

述語 A が Δ_1 であるとは，A 自身も，否定 $\neg A$ も共に Σ_1 であることを意味する．つまり，ある計算可能述語 P, Q が存在して，

$$A(n) \iff \exists s P(n, s), \qquad \neg A(n) \iff \exists s Q(n, s)$$

となることである．つまり，Σ_1 かつ Π_1 であるような述語のことである．Δ_1 集合という概念も同様に定義する．

計算可能性理論における最初期の定理として，計算可能性が，この Δ_1 定義可能性として特徴付けられる，というポストの定理がある．これによって，計算可能性と論理学の新たな対応が得られる．

定理 1.6 (ポストの定理)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算可能 $\iff$ A は Δ_1.

これを証明するために，以下の Σ_1-選択原理を証明しよう．選択原理と呼ばれるものは，

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ R(x, y) \implies (\exists f\colon X \to Y)(\forall x \in X)\ R(x, f(x))$$

という形状の主張である．この前提を満たす述語 R をしばしば多価関数と考える．多価関数の出力値から 1 つだけ選び出す関数が，選択関数 f である．

集合 $R_x = \{y \in Y : R(x, y)\}$ を考えることによって，集合を用いた同値な定式化を与えることができる．この場合，選択原理とは，空でない集合列 $(R_x)_{x \in X}$ に対して，$\prod_{x \in X} R_x$ は空ではない，という主張として表せる．

一般の X, Y, R に対しては，選択原理は，超越的な公理（選択公理）として導入せざるを得ない．しかし，R が Σ_1 定義可能である場合には，特別な公理は必要とせず，選択原理は定理になる．実際，計算可能な選択関数が存在する．つまり，Σ_1-定義可能な多価関数は，必ず計算可能な選択関数を持つ，というものが Σ_1-選択原理である．

補題 1.7 (Σ_1-選択原理)**.** R が Σ_1 述語であるとする．このとき，

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y < 2)\ R(x, y) \implies (\exists f \in \mathrm{Comp})(\forall x \in \mathbb{N})\ R(x, f(x)).$$

ここで，Comp は計算可能関数全体の集合とする．

Proof. R は Σ_1 なので，$\exists t S(x, y, t)$ として表せる．いま，$x \in \mathbb{N}$ を固定し，$A(t) \equiv S(x, 0, t)$ および $B(t) \equiv S(x, 1, t)$ とおく．明らかに $R \equiv \exists t A \vee \exists t B$ であるから，前提より，$\exists t A \vee \exists t B$ が成立

している．次のようなプロセスで，f の計算を行う．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \boxed{A(0)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & \boxed{B(0)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & \boxed{A(1)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & \boxed{B(1)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & \boxed{A(2)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & \boxed{B(2)} \arrow[r, "\texttt{no}"] \arrow[d, "\texttt{yes}"'] & {} \\
& \boxed{\texttt{output } 0} & \boxed{\texttt{output } 1} & \boxed{\texttt{output } 0} & \boxed{\texttt{output } 1} & \boxed{\texttt{output } 0} & \boxed{\texttt{output } 1} &
\end{tikzcd}$$

形式的に言い換えれば，$S(x, y, t)$ となる最小の (t, y) を探索する．ここで，(t, y) の大小比較について，(t, y) と $2t + y$ を同一視する．そのような最小の (t, y) について，$y = 0$ ならば $f(x) = 0$ とし，$y = 1$ ならば $f(x) = 1$ とする．

仮定より，$\exists t A(t)$ または $\exists t B(t)$ が成り立つから，t_0 をそのような最小の値とする．このとき，f のアルゴリズムは，$A(t_0)$ または $B(t_0)$ に対応するノードに辿り着いた後，そこで yes と答えるから，何らかの値を出力して停止する．したがって，

$$f(x) = y \implies S(x, y, t_0) \implies \exists t S(x, y, t) \iff R(x, y)$$

が成立しているから，$R(x, f(x))$ が示された． □

上では，2 値関数に対する Σ_1-選択原理を証明したが，同様の方法で，自然数値関数に対する Σ_1-選択原理を証明できる．2 値関数に対する Σ_1-選択原理は，論理学的に定式化することもできる．Σ_1-選択原理の前提は，2 つの Σ_1 論理式 A と B のどちらか一方が成り立っていることは知っているが，どちらが成り立っているかはわからない，というものである．つまり，古典論理的には $A \vee B$ であるが，$A \vee B$ を計算的に実現できるかは不明瞭である，という前提である．この前提について，裏を返せば，2 つの Π_1 論理式 $\neg A$ と $\neg B$ の両方が同時に成立していることはない，と言い換えることができる．しかし，この場合にも，$A \vee B$ のどちらかを計算的に実現できる，というものが Σ_1-選択原理である．したがって，Σ_1-選択原理を以下のように書き直すことができるだろう．

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B).$$

否定が多くてややこしいので，否定側の Π_1 論理式 $P \equiv \neg A$ と $Q \equiv \neg B$ に注目して書き直すと，

$$\neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q).$$

これはいわゆるド・モルガンの法則と呼ばれるもの（の一方向）である．Π_1 論理式に対するド・モルガンの法則なので，**Π_1-ド・モルガンの法則**と呼ばれる．直観主義論理においては，一般にド・モルガンの論理は成立せず，実際に計算的に実現できない．しかし，Π_1-ド・モルガンの法則というものに限っていえば，計算的に実現できる，というのが Σ_1-選択原理である．

この Π_1-ド・モルガンの法則は，集合記法を用いれば，Π_1 の分離性と呼ばれる性質の形で述べられることが多い．

演習問題 1.8. Π_1 集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について，$A \cap B = \varnothing$ であると仮定する．このとき，ある計算可能集合 $C \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することを示せ．

$$A \subseteq C \quad \textit{and} \quad B \cap C = \varnothing.$$

（ヒント: Σ_1-選択原理を用いよ）

Proof (定理 1.6). ($\Rightarrow$) $A \subseteq \mathbb{N}$ を Δ_1 述語とする．

$$R(x,y) \equiv \Big(\big(y = 1 \wedge A(x)\big) \vee \big(y = 0 \wedge \neg A(x)\big)\Big)$$

とすれば，排中律より $\forall x \exists y < 2\ R(x,y)$ である．また，A も $\neg A$ も Σ_1 であるから，R は Σ_1 である．したがって，Σ_1-選択原理より，ある計算可能関数 f が存在して，$\forall x\ R(x, f(x))$ が成立する．このとき，明らかに $f(x)$ は A の特性関数である．

($\Leftarrow$) A が計算可能とし，特性関数と同一視する．A は計算可能関数なので，計算ステップの情報 $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ が付随している．このとき，

$$A(x) = y \iff (\exists s \in \mathbb{N})\ A_s(x) = y.$$

したがって，$A(x) = 1$ と $A(x) = 0$ 共に Σ_1 述語として記述できる．これは A と $\neg A$ が共に Σ_1 であることを意味する．よって，A は Δ_1 である． □

1.4. Σ_1 のブール結合

我々は，「計算」というものを時間経過毎に変化する計算状況の極限と考えることができる．たとえば，部分計算可能関数 $f\colon \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ には，各計算ステップのデータである計算可能関数 $\tilde{f}\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が付随していた．つまり，$f(n)$ の計算は，$\tilde{f}(n,0), \tilde{f}(n,1), \dots$ と刻一刻と移り変わり，その極限として与えられる．

$$f(n) = \lim_{s\to\infty} \tilde{f}(n,s)$$

このように計算概念と極限概念には深い関わりがある．また，Σ_1 と下半計算可能性が等しかったことを思い出せば，Σ_1 定義可能性もまた極限概念である．ここでは，下半計算可能性を「初期値 0 心変わり 1 の極限計算可能性」と見ることにしよう．

命題 1.9. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が下半計算可能であることと，次の 3 条件を満たす計算可能関数 $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$ が存在することは同値である．

$$\begin{aligned} \text{極限計算可能性:} &\quad n \in A \iff \lim_{s\to\infty} \varphi(n,s) = 1 \\ \text{初期値 0:} &\quad \varphi(n,0) = 0 \\ \text{変心 1:} &\quad |\{s \in \mathbb{N} : \varphi(n,s) \neq \varphi(n,s+1)\}| \leqslant 1 \end{aligned}$$

命題 1.9 の 3 条件は，上から順に，**極限計算可能性** (*limit computability*), 初期値 0, **変心** 1 (*at most one mind-change*) を表す．すると，より多くの心変わりを行う計算モデルを考えたらどうなるだろうか．このような計算モデルは，確定的に計算できなくとも，近似的に計算できれば十分，という状況の下で便利である．

定義 1.10. 関数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が k-**変心計算可能** (*computable with k mind changes*) とは，次の 2 条件を満たす計算可能関数 $\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}$ が存在することである．

$$\begin{array}{rl} \text{極限計算可能性:} & f(n)=\lim_{s\to\infty}\varphi(n,s) \\ \text{変心 } k\text{:} & |\{s\in\mathbb{N}:\varphi(n,s)\neq\varphi(n,s+1)\}|\leqslant k \end{array}$$

A が集合（つまり 2 値関数）であり，φ が初期値条件 $\varphi(n,0)=0$ を満たす場合，A を k-**計算的可算**または $(\Sigma_1)_k$ と呼び，初期値条件 $\varphi(n,0)=1$ を満たす場合，k-**余計算的可算**または $(\Pi_1)_k$ と呼ぶ．

A が集合であるとき，A が $(\Sigma_1)_k$ であることと A の補集合が $(\Pi_1)_k$ であることが同値であることは容易に確かめられる．

リマーク． 英語圏においては，集合の k-半計算可能性 (k-computably enumerable) および k-余半計算可能性 (k-co-computably enumerable) は，それぞれ k-c.e. および co-k-c.e. と略されることが多い．

集合の変心回数について，同様のアイデアは，位相空間論におけるハウスドルフの差の階層 (difference hierarchy) として考察されていた．つまり，集合の特性関数の変心は，集合差として表すことができる．具体的には，以下のように特徴づけることができる．

命題 1.11. 集合 $A\subseteq\mathbb{N}$ について，次の 3 条件は同値である．

1. $A\in(\Sigma_1)_{k+1}$ である．
2. ある $B\in\Sigma_1$ と $C_k\in(\Sigma_1)_k$ が存在して，$A=B\backslash C_k$ となる．
3. ある Σ_1 集合列 $(S_i)_{i\leqslant k}$ が存在して，$A=S_0\backslash(S_1\backslash(\dots\backslash(S_{k-1}\backslash S_k)))$

Proof. (2)⇔(3): 帰納法を用いて容易に示せる．

(3)⇒(1): $A=B\backslash C_k$ とする．B は Σ_1 なので，変心 1 の推測関数 φ_B を持つ．また，C_k は $(\Sigma_1)_k$ なので，帰納的仮定より，変心 k の推測関数 φ_C を持つ．このとき，A の推測関数 φ_A を次によって与える．

$$\varphi_A(n,s)=\begin{cases}1-\varphi_C(n,s) & \text{if } (\exists t\leqslant s)\ \varphi_B(n,t)=1,\\ \varphi_B(n,s) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

つまり，φ_A はまずは φ_B をシミュレートし，φ_B の出力が 0 から 1 へ変心したら，$1-\varphi_C$ をシミュレートする．ここで，$1-\varphi_C$ の初期出力は 1 なので，シミュレート対象の φ_B から $1-\varphi_C$ への変更の瞬間は，新たな変心は発生しないと仮定できる．φ_B の変心回数は高々 1 回で，φ_C の変心回数は高々 k 回なので，φ_A の変心回数は高々 $k+1$ 回である．φ_A の定義より，

$$\begin{cases}\lim_{s\to\infty}\varphi_B(n,s)=0 \implies \lim_{s\to\infty}\varphi_A(n,s)=0,\\ \lim_{s\to\infty}\varphi_B(n,s)=1 \implies \lim_{s\to\infty}\varphi_A(n,s)=\lim_{s\to\infty}(1-\varphi_C(n,s)).\end{cases}$$

言い換えれば,

$$\begin{cases} B(n) = 0 \implies A(n) = 0, \\ B(n) = 1 \implies A(n) = 1 - C_k(n). \end{cases}$$

これが意味することは, $A = B \backslash C_k$ ということである.

(1)⇒(3): $A \in (\Sigma_1)_{k+1}$ とし, φ を初期値 0 変心 $k+1$ の A の推測関数とする. このとき, $B = \{n \in \mathbb{N} : (\exists s)\, \varphi(n,s) = 1\}$ とすると, これは Σ_1 集合である. また,

$$\psi(n,s) = \begin{cases} \varphi(n,s) & \text{if } (\exists t \leqslant s)\, \varphi(n,t) = 1, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする. この ψ は, 初期値 1 から開始し, φ の値が 1 となるのを待ち, その後は φ をシミュレートする. φ の初期値は 0 であるから, φ の値が 1 となるまでに 1 回の変心を行っているから, それ以降は高々 k 回しか変心しない. つまり, ψ は, 初期値 1 変心 k の推測関数である. したがって, ψ は $(\Pi_1)_k$ 集合 P_k を定義する. 定義より,

$$\begin{cases} n \notin B \implies \lim_{s\to\infty} \varphi(n,s) = 0, \\ n \in B \implies \lim_{s\to\infty} \psi(n,s) = \lim_{s\to\infty} \varphi(n,s). \end{cases}$$

言い換えれば,

$$\begin{cases} n \notin B \implies n \notin A, \\ n \in B \implies (n \in P_k \iff n \in A). \end{cases}$$

これは, $A = B \cap P_k$ を意味する. $(\Pi_1)_k$ 集合 P_k の補集合を C_k とすれば, これは $(\Sigma_1)_k$ であり, $A = B \backslash C_k$ を得る. □

例 1.12 (数え上げ問題)**.** 計算可能述語 V について,

$$\mathsf{Card}_V(n) = |\{t \in \mathbb{N} : V(n,t)\}|$$

と定義する. もし, 関数 $f \colon \mathbb{N} \to \{0,1,\dots,k\}$ が $f(n) = \mathsf{Card}_V(n)$ の形で与えられているならば, k-変心計算可能である.

計算量理論においては, V が多項式時間計算可能述語であり, t の探索範囲が多項式長さで上から押さえられている場合を考え, このような関数のクラスを数え上げクラス $\#\mathsf{P}$ と表す.

例 1.13 (パリティ問題)**.** 述語 A について, ある計算可能述語 V が存在して, 次の形で表せるとする.

$$A(n) = \begin{cases} \mathbf{true} & \text{if } \mathsf{Card}_V(n) \text{ is even} \\ \mathbf{false} & \text{if } \mathsf{Card}_V(n) \text{ is odd} \end{cases}$$

このとき, A はある k について k-変心計算可能である. このような述語のクラスを $\oplus\Delta_1$ と書くことにしよう.

計算量理論においては, これに対して, 数え上げの場合の例のような多項式制約を加え, このような述語のクラスをパリティ・クラス $\oplus\mathsf{P}$ と表す.

■述語としての表記: 1960 年代，ヒラリー・パトナムは，試行錯誤 (trial-and-error) というプロセスを論理学的に記述することを試みた．変心を行う計算可能性を試行錯誤というプロセスだと思えば，これは以下のように，論理学的に表すことができる．まず，A が $(\Pi_1)_{k+1}$ 述語であるとは，ある Σ_1 述語 P と $(\Sigma_1)_k$ 述語 Q_k が存在して，

$$A(n) \iff [P(n) \to Q_k(n)]$$

と書けることである．$(\Sigma_1)_{k+1}$ 述語はその否定である．あるいは，同値な定義であるが，A が $(\Sigma_1)_{k+1}$ 述語であるとは，ある Σ_1 述語 P と $(\Sigma_1)_k$ 述語 Q_k が存在して，

$$A(n) \iff [P(n) \land \neg Q_k(n)]$$

と書けることである．したがって，いくつか例を挙げると，以下，P, Q, R は何らかの Σ_1 述語を表すものとすれば，

- $(\Sigma_1)_3$ 述語は，$P(x) \land (\neg Q(x) \lor R(x))$ の形の述語である．
- $(\Pi_1)_3$ 述語は，$P(x) \to \neg(Q(x) \to R(x))$ の形の述語である．これは，$\neg P(x) \lor (Q(x) \land \neg R(x))$ と書いても同値である．

これらはいずれも Σ_1 論理式のブール結合で書けている．

定義 1.14. A が $(\Sigma_1)_*$ 述語であるとは，Σ_1 述語のブール結合で書けることを意味する．つまり，$(\Sigma_1)_*$ 述語は以下のように帰納的に定義される．

1. Σ_1 論理式は $(\Sigma_1)_*$ 述語である．
2. A, B が $(\Sigma_1)_*$ 述語ならば，$\neg A$, $A \lor B$, $A \land B$, $A \to B$ はいずれも $(\Sigma_1)_*$ 述語である．

BNF 記法で書けば，

$$A ::= \Sigma_1 \mid \neg A \mid A \lor A \mid A \land A \mid A \to A$$

という感じである．これが正確に，変心回数の上界が定数であるような計算によって推測できるものと一致するというパトナムの定理を証明しよう．

命題 1.15 (パトナムの定理)**.** 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，以下は同値である．

1. A は $(\Sigma_1)_*$ である．
2. ある $k \in \mathbb{N}$ について，A は k-変心計算可能である．

Proof. (1)⇒(2): 論理結合子 $\to$ の適用は，$(\Pi_1)_{k+1}$ 述語の構成によって表せたことを思い出す．まず，否定 $\neg A$ については，$A \to \varnothing$ として表せる．ここで，$\varnothing$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\neg\varnothing(n)$

となる述語とする．これは計算可能述語なので，自由に用いてよい．さらに，古典論理において，$A \wedge B \equiv (\neg A \to \neg B)$ および $A \vee B \equiv (A \to B) \to B$ である．したがって，任意の $(\Sigma_1)_*$ 述語は，ある k について，$(\Pi_1)_k$ であり，つまり k-変心計算可能である．

(2)⇒(1): 上で述べたように，$(\Sigma_1)_k$ の定義は，Σ_1 のブール結合によって表すことができる． □

演習問題 1.16. $(\Sigma_1)_* = \oplus\Delta_1$ を証明せよ．

つづいて，ポストの定理の試行錯誤の階層版の証明を与えよう．

定理 1.17. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，次の 2 条件は同値である．

1. A は k-変心計算可能である．
2. A は $(\Sigma_1)_{k+1}$ かつ $(\Pi_1)_{k+1}$ である．

$(\Sigma_1)_{k+1}$ かつ $(\Pi_1)_{k+1}$ であることを $(\Delta_1)_{k+1}$ と書くことにすれば，上の定理は，

$$k\text{-変心計算可能} = (\Delta_1)_{k+1}$$

であることを意味する．この証明のために，再び 2 値選択原理の証明を行おう．

補題 1.18 ($(\Sigma_1)_{k+1}$-選択原理)**.** R が $(\Sigma_1)_{k+1}$ 述語であるとする．このとき，

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y < 2)\ R(x, y) \implies (\exists f \in \mathrm{Comp}_k)(\forall x \in \mathbb{N})\ R(x, f(x)).$$

ここで，Comp_k は k-変心計算可能関数全体の集合とする．

Proof. $A = \{n \in \mathbb{N} : R(n, 0)\}$ かつ $B = \{n \in \mathbb{N} : R(n, 1)\}$ とする．このとき，$A, B \subseteq \mathbb{N}$ は $(\Sigma_1)_{k+1}$ 集合で，$A \cup B = \mathbb{N}$ である．$\varphi_A, \varphi_B \colon \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ をそれぞれ A と B の初期値 0, 変心 $k+1$ 近似とする．$n \in \mathbb{N}$ を固定する．$A \cup B = \mathbb{N}$ なので，$\varphi_A(n, s_n) = 1$ または $\varphi_B(n, s_n) = 1$ なる $s_n \in \mathbb{N}$ が存在する．そのような最小の $s_n \in \mathbb{N}$ を取る．このとき，以下のように計算可能関数 $\varphi \colon \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ を定義する．

$$\varphi(n, t) = \begin{cases} 1 - \varphi_A(n, s_n + t) & \text{if } \varphi_A(n, s_n) = 1 \\ \varphi_B(n, s_n + t) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

前者の場合，$\varphi(n, s_n) \neq \varphi(k, 0)$ であり，後者の場合，$\varphi(n, s_n) \neq \varphi(k, 0)$ であるから，既に 1 回以上変心している．よって，s_n 以降では，残り k 回以下しか変心できない．つまり，φ は高々 k 回しか変心しない．$f(n) = \lim_t \varphi(n, t)$ によって定義すると，f は k-変心計算可能である．このとき，

$$\begin{cases} \varphi_A(n, s_n) = 1 \implies f(n) = \lim_{t\to\infty} \varphi(n, t) = \lim_{t\to\infty}(1 - \varphi_A(n, s_n + t)) = (1 - A(n)), \\ \varphi_A(n, s_n) \neq 1 \implies f(n) = \lim_{t\to\infty} \varphi(n, t) = \lim_{t\to\infty} q(n, s_n + t) = B(n). \end{cases}$$

前者の場合，$f(n) = 0$ であることと $A(n)$, つまり $R(n, 0)$ であることが同値であり，$\neg R(n, 0)$ ならば $R(n, 1)$ であるから，どちらにせよ $R(n, f(n))$ を満たす．後者の場合，$f(n) = 1$ であることと $B(n)$, つまり $R(n, 1)$ であることが同値であり，$\neg R(n, 1)$ ならば $R(n, 0)$ であるから，どちらにせよ $R(n, f(n))$ を満たす．よって，f は R の k-変心計算可能な選択関数である． □

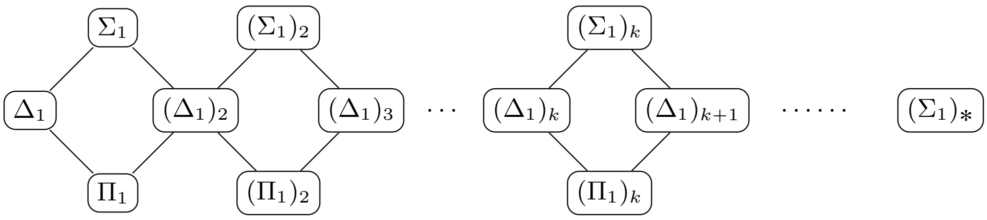
Proof (定理 1.17). (1)⇒(2): φ を A の変心 k 近似とする．このとき，各 $i \in \{0, 1\}$ について，$\psi_i(n, 0) = i$ かつ $\psi_i(n, s + 1) = \varphi(n, s)$ によって定義すれば，ψ_i は A の初期値 i 変心 $(k + 1)$ 近似である．よって，A は $(\Sigma_1)_{k+1}$ かつ $(\Pi_1)_{k+1}$ である．つまり $(\Delta_1)_{k+1}$ である．

(2)⇒(1) A を $(\Delta_1)_{k+1}$ 述語とする．

$$R(x, y) \equiv \Big(\big(y = 1 \wedge A(x)\big) \vee \big(y = 0 \wedge \neg A(x)\big) \Big)$$

とすれば，排中律より $\forall x \exists y < 2\ R(x, y)$ である．また，A も $\neg A$ も $(\Sigma_1)_{k+1}$ であるから，R は $(\Sigma_1)_{k+1}$ である．したがって，$(\Sigma_1)_{k+1}$-選択原理より，ある k-変心計算可能関数 f が存在して，$\forall x\ R(x, f(x))$ が成立する．このとき，明らかに $f(x)$ は A の特性関数である． □

これが，パトナムの試行錯誤の階層である．



しかし，極限計算可能なもののすべてがこの階層の内部に入るわけではない．なぜなら，パトナムの階層では，$n \in A$ を推測するために必要な変心回数の上界 k が定数として与えられているが，実際の極限的推測においては，$n \in A$ を推測するための変心回数 $k(n)$ が n 毎に異なるかもしれないからである．この問題の解決のために導入されたのが，以下の概念である．

定義 1.19. 関数 $A\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が **ω-変心計算可能** (*computable with ω mind changes*) とは，次の 2 条件を満たす計算可能関数 $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ と $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在することである．

$$\begin{aligned} \text{極限計算可能性:} \quad & A(n) = \lim_{s \to \infty} \varphi(n, s) \\ \text{計算可能変心:} \quad & |\{s \in \mathbb{N} : \varphi(n, s) \neq \varphi(n, s + 1)\}| \leqslant h(n) \end{aligned}$$

これは，試行錯誤階層よりも真に巨大なクラスを与える．

$$\Delta_1 \subsetneq (\Delta_1)_2 \subsetneq (\Delta_1)_3 \subsetneq \cdots \subsetneq (\Sigma_1)_* \subsetneq \text{“}\omega\text{-変心計算可能”}$$

■停止問題: 停止問題は，$\Delta_1 \subsetneq \Sigma_1$ の具体的を与えるという点で重要である．停止問題のアイデアを拡張して，$(\Delta_1)_k \subsetneq (\Sigma_1)_k$ であることを確認しよう．

定理 1.20. $(\Delta_1)_k \subsetneq (\Sigma_1)_k$.

Proof. $(\Delta_1)_2 \subsetneq (\Sigma_1)_2$ の場合のみ証明を与える．さて，少し難しい点として，変心計算可能性の概念が全域計算可能関数によって定義されていることである．万能チューリングマシンの存在により，我々は部分計算可能関数をリストアップできるが，どれが全域関数かは分からない．このため，少々の技巧的議論を要する．まず，$t(e,n,s)$ を次のように定義する．

$$t(e,n,s) = \max\{t \in \mathbb{N} : \{\!\{e\}\!\}_s(n,t)\downarrow\}$$

このとき，

$$\varphi(e,n,s) = \begin{cases} \{\!\{e\}\!\}\big(n, t(e,n,s)\big) & \text{if } t(e,n,s) \text{ exists} \\ \uparrow & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とすると，φ は計算可能関数である．次に，$m(e,n,s)$ と $u(e,n,s)$ を次のように定義する．

$$m(e,n,s) = |\{t < s : \varphi(e,n,t)\downarrow \quad \text{and} \quad \varphi(e,n,t) \neq \varphi(e,n,t+1)\}|$$
$$u(e,n,s) = \max\{t \leqslant s : m(e,n,s) \leqslant 1\}$$

このとき，

$$\psi(e,n,s) = \varphi\big(e,n,u(e,n,s)\big)$$

と定義すると，ψ も計算可能関数である．このとき，どんな 1-変心計算可能関数 f についても，ある e が存在して，

$$f(n) = \lim_{s\to\infty} \psi(e,n,s)$$

と表すことができる．いま，

$$A = \{e \in \mathbb{N} : \psi(e,e,s)\downarrow \ \& \ \lim_{s\to\infty} \psi(e,e,s) > 0\}$$

とする．このとき，A は $(\Sigma_1)_2$ 集合である．この A が $(\Delta_1)_2$ 集合でないことを示そう．まず，任意の e に対して，

$$\psi\big(d(e),n,s\big) = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi(e,n,s)\downarrow \text{ and } \psi(e,n,s) = 0 \\ 0 & \text{if } \psi(e,n,s)\downarrow \text{ and } \psi(e,n,s) > 0 \\ \uparrow & \text{if } \psi(e,n,s)\uparrow \end{cases}$$

となる $d(e)$ が存在する．いま，任意の $(\Delta_1)_2$ 集合 B を取ると，

$$n \in B \iff f(n) = 1$$

となるような，1-変心計算可能関数 $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ が存在する．上で述べたように，$f(n) = \lim_{s\to\infty} \psi(e,n,s)$ となる e が存在する．しかし，このとき，

$$f(d(e)) = 1 \neq \lim_{s\to\infty} \psi(d(e),d(e),s)$$

となることが容易に分かる．したがって，$A \neq B$ である．以上より，A が $(\Delta_1)_2$ 集合でないことが示された． □

■発展的話題: 1980 年代になると，エルショフ (Yuri Ershov) は，パトナムの階層を順序数変心の極限計算可能性に拡張した．これは順序数回変心するという意味ではなく，有限回しか変心しないが，その変心アルゴリズムが順序数カウンターに従う必要がある，という意味である．計算理論や証明論などにおいて順序数がしばしば用いられるが，これを理解するためには，順序数を「数の無限への拡張」ではなく「**有限カウントダウンのシステム**」と認識することが重要である．つまり，

順序数とは，無限的な概念ではなく，むしろ有限的な概念である

ということを理解しなければならない．

すこし技術的な話になるが，この詳細を軽く述べておこう．一般の α-変心計算には，カウントダウンシステム $c\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\alpha$ が付随している．f の推測を行う際,「変心を行うたびに，カウンターの値を減らさなければならない」ということを要求するものである．もし，カウンターの現在値が自然数 k であれば，残り k 回しか変心の余地が残されていない．より正確には,

1. 値 n が入力されると，カウンターの初期値 $c(n,0)$ は α 未満の順序数に設定される．
2. $f(n)$ の推測値を変更するためには，カウンターの値を減らさなければならない．つまり,

$$\varphi(n,s+1)\neq\varphi(n,s) \implies c(n,s+1)<c(n,s)$$

3. よって，カウンターが 0 になったら，それ以上の変心をすることはできない．

順序数の無限下降列は存在しないから，変心は有限回しか発生しないことが保証される．この変心の階層は現在，**エルショフ階層** (*Ershov hierarchy*) と呼ばれ，計算可能性理論の基本的概念となっている．変心の階層を順序数（カウントダウンシステム）に拡張する必要性について疑問を抱く人もいるかもしれないが，実はこの拡張は理論的には極めて重要である．というのも，変心の階層を順序数に拡張することによって，一般位相空間論における**ハウスドルフの差の階層** (*Hausdorff difference hierarchy*) と結び付くことができ，計算可能性理論の位相空間的解釈あるいはその逆をより完全なものに近づけるからである．しかし，エルショフ階層を正確に定義するためには，計算可能順序数の理論が必要であるため，本講義ではこれ以上は触れない．

1.5. Δ_2 定義可能性

ここまででは，変心回数の制限された極限計算可能性を取り扱ったが，最も素朴に，単なる極限計算可能性について考察してみよう．

定義 1.21. 関数 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が**極限計算可能** (*limit computable*) とは，次を満たす計算可能関数 $\varphi\colon\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在することである．

$$f(n)=\lim_{s\to\infty}\varphi(n,s).$$

この概念も，論理学的に明快な特徴付けがある．述語 A が Σ_2 であるとは，ある計算可能述語 R が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，以下が成立することを意味する．

$$A(n) \iff (\exists a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})\ R(n, a, b).$$

また，述語 A が Π_2 であるとは，ある計算可能述語 R が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，以下が成立することを意味する．

$$A(n) \iff (\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})\ R(n, a, b).$$

以前と同様に，Σ_2 かつ Π_2 である述語を Δ_2 と呼ぶ．

定理 1.22 (シェーンフィールドの極限補題)**.** 任意の集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，次が成立する．

$$A \text{ は } \Delta_2 \iff A \text{ は極限計算可能である．}$$

これは，以下の Σ_2-選択原理から導くことができる．

補題 1.23 (Σ_2-選択原理)**.** R が Σ_2 述語であるとする．このとき，

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y < 2)\ R(x, y) \implies (\exists f \in \mathrm{Lim})(\forall x \in \mathbb{N})\ R(x, f(x)).$$

ここで，Lim は極限計算可能関数全体の集合とする．

Proof. R は Σ_2 なので，$\exists a \forall b S(x, y, a, b)$ として表せる．いま，$x \in \mathbb{N}$ を固定し，$A(a, b) \equiv S(x, 0, a, b)$ および $B(a, b) \equiv S(x, 1, a, b)$ とおく．前提より，$\forall a \exists b A \vee \forall a \exists b B$ が成立している．次のようなプロセスで，f の計算的近似を行う．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \boxed{\forall b < s.\ A(0,b)} \arrow[loop above, "\texttt{yes}"] \arrow[r, "\texttt{no}"] & \boxed{\forall b < s.\ B(0,b)} \arrow[loop above, "\texttt{yes}"] \arrow[r, "\texttt{no}"] & \boxed{\forall b < s.\ A(1,b)} \arrow[loop above, "\texttt{yes}"] \arrow[r, "\texttt{no}"] & \boxed{\forall b < s.\ B(1,b)} \arrow[loop above, "\texttt{yes}"] \arrow[r, "\texttt{no}"] & {}
\end{tikzcd}$$

ここで，s は現在のステップ数である．この推測アルゴリズムが第 s ステップで，$\forall b < s.A(a, b)$ のノードにいるならば，$\varphi(x, s) = 0$ とし，$\forall b < s.B(a, b)$ のノードにいるならば，$\varphi(x, s) = 1$ とする．

形式的に言い換えれば，第 s ステップでは，まず，$\forall b < s.S(x, y, a, b)$ となる最小の $(a, y) < s$ を有限時間で計算する．ここで，(a, y) と $2a + y$ を同一視する．そのような最小の (a, y) について，$y = 0$ ならば $\varphi(x, s) = 0$ とし，$y = 1$ ならば $\varphi(x, s) = 1$ とする．

仮定より，$\forall b A(a, b)$ または $\forall b B(a, b)$ となる a が存在するから，a_0 をそのような最小の値とする．このとき，φ の推測アルゴリズムは，その状態に対応するノードに辿り着いた後は，すべての

ステップで yes と答えるから，このノードに永遠に留まる．したがって，この場合，

$$f(x) := \lim_{s\to\infty} \varphi(x,s) = \begin{cases} 1 & \text{if } \forall b A(a_0, b), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以上より，

$$f(x) = y \implies \forall b S(x,y,a_0,b) \implies \exists a \forall b S(x,y,a,b) \iff R(x,y)$$

が成立しているから，$R(x, f(x))$ が示された． □

この Σ_2-選択原理は，Π_2 の分離性と呼ばれる性質の形で述べられることが多い．

演習問題 1.24. Π_2 集合 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について，$A \cap B = \varnothing$ であると仮定する．このとき，ある Δ_2 集合 $C \subseteq \mathbb{N}$ が存在して，以下が成立することを示せ．

$$A \subseteq C \quad \textit{and} \quad B \cap C = \varnothing.$$

（ヒント: Σ_2-選択原理を用いよ）

*Proof (*定理 *1.22).* (⇒) $A \subseteq \mathbb{N}$ を Δ_2 述語とする．

$$R(x,y) \equiv \Big(\big(y = 1 \wedge A(x)\big) \vee \big(y = 0 \wedge \neg A(x)\big) \Big)$$

とすれば，排中律より $\forall x \exists y < 2\ R(x,y)$ である．したがって，Σ_2-選択原理より，ある極限計算可能関数 f が存在して，$\forall x\ R(x, f(x))$ が成立する．このとき，明らかに $f(x)$ は A の特性関数である．

(⇐) A が極限計算可能とし，φ をその推測関数とする．このとき，

$$A(x) = y \iff (\exists s \in \mathbb{N})(\forall t \geqslant s)\ \varphi(x,t) = y.$$

したがって，$A(x) = 1$ と $A(x) = 0$ 共に Σ_2 述語として記述できる．これは A と $\neg A$ が共に Σ_2 であることを意味する．よって，A は Δ_2 である． □

Σ_2 と Π_2 の特徴付けも同様に与えることができる．

命題 1.25. 集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，次の 2 条件は同値である．

1. *A は Σ_2 である．*
2. *ある計算可能関数 φ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$A(n) = \liminf_{s \in \mathbb{N}} \varphi(n,s)$.*

Proof. (2)⇒(1): 上極限の定義について考えると，

$$n \in A \iff \liminf_{s \in \mathbb{N}} \varphi(n,s) = 1 \iff (\exists s \in \mathbb{N})(\forall t \geqslant s)\ \varphi(n,t) = 1.$$

したがって，A は Σ_2 である．

(1)⇒(2): A は Σ_2 なので，$\exists a \forall b\ R(n,a,b)$ と表すことができる．まず，上記の Σ_2 条件の証拠となる最小の a を探索する $\alpha\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を再帰的に定義する．

$$\alpha(n,s+1)=\begin{cases}\alpha(n,s) & \text{if } (\forall b<s)\ R(n,\alpha(n,s),b).\\ \alpha(n,s)+1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

有限個の b に対する R の真理値の計算は，有限時間で実行できる．したがって，これは計算可能な場合分けと再帰による定義なので，α は計算可能である．また，α は以下の性質を満たす．

$$\begin{cases}n\in A \implies \lim_{s\to\infty}\alpha(n,s)=\min\{a:\forall b\ R(n,a,b)\},\\ n\notin A \implies \lim_{s\to\infty}\alpha(n,s)=\infty.\end{cases}$$

いま，$\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\{0,1\}$ を以下のようにして定義する．

$$\varphi(n,s)=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha(n,s+1)=\alpha(n,s)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

これも計算可能な場合分けによる定義であるから，φ は計算可能である．$n\in A$ ならば，$\alpha(n,s)$ の値は安定するので，$\varphi(n,s)$ の値も 1 に安定する．$n\notin A$ ならば，$\alpha(n,s)$ の値は無限回変化するので，$\varphi(n,s)$ の値は無限回 0 になる．つまり，$\liminf_{s\in\mathbb{N}}\varphi(n,s)=0$ である．したがって，$A(n)=\liminf_{s\in\mathbb{N}}\varphi(n,s)$ となることが示された． □

同様にして，Π_2 を $\limsup$ によって特徴づけることができる．

歴史的リマーク (計算論的学習理論)．極限計算可能性に関する最初期の研究は，1950 年代末から 60 年代頃のシェーンフィールド，パトナム，ゴールドらの研究がある．

- 極限計算可能性に対する最初の研究は 1959 年のシェーンフィールドによるが，彼の論文は純粋数学的な興味に端を発するものであった．
- 1965 年，パトナムは，変心 (mind change) や試行錯誤 (trial and error) という言葉を用いて，極限計算可能性の概念を説明し，試行錯誤述語の概念を導入した．
- 1965 年のゴールドの論文では，人工知能 (artificial inteligence) の研究が動機であると明示的に述べている．彼は，思索するコンピュータの試作的モデルとして，極限計算可能性の研究を行った．
- 1967 年，ゴールドは言語を学習する人工知能の数学的モデル化のために，極限計算可能性の概念を用いた．ゴールドによれば，計算言語学，特に発見的プロセス，心理言語学，児童学習などに応用を持つであろう，とのことであった．
- ゴールドの理論は**極限同定** (*identification in the limit*) の理論と呼ばれ，その後，機械学習の数学的枠組を研究する計算論的学習理論の一分野として（主流ではないが）生存している．

歴史的リマーク． 極限補題は，1959 年にシェーンフィールドによって，1965 年にパトナムによって独立に証明された．シェーンフィールドが示した極限補題はもう少し強い形で，収束率に関する有用な洞察をさらに含んでおり，この強い形の方を極限補題と呼ぶことも多い．

1.6. Δ_n 定義可能性

ここまでに量化記号を 2 つ含む論理式について扱ってきた．それでは，2 つと言わずに，もっとたくさんの量化記号を含む論理式について考察してみよう．

定義 1.26. 述語 A が Σ_{n+1} であるとは，ある Π_n 述語 B に対して，$A \equiv \exists nB$ の形であることを指す．同様に，述語 A が Π_{n+1} であるとは，ある Σ_n 述語 B に対して，$A \equiv \forall nB$ の形であることを指す．

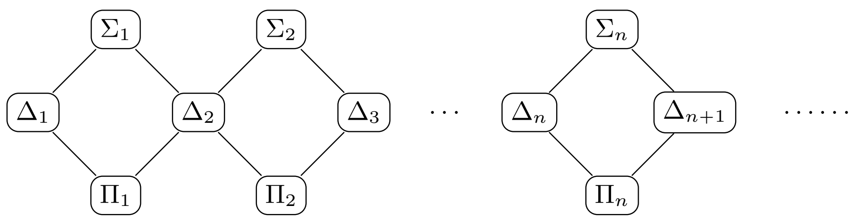
例 1.27. 述語 A が Σ_3 であるとは，ある計算可能述語 R が存在して，以下のように書けることである．

$$A(n) \equiv (\exists a \in \mathbb{N})(\forall b \in \mathbb{N})(\exists c \in N)\ R(n,a,b,c)$$

述語 A が Π_5 であるとは，ある計算可能述語 R が存在して，以下のように書けることである．

$$A(n) \equiv (\forall a \in \mathbb{N})(\exists b \in \mathbb{N})(\forall c \in \mathbb{N})(\exists d \in N)(\forall e \in \mathbb{N})\ R(n,a,b,c,d,e)$$

以前と同様に，Σ_n かつ Π_n であるとき，Δ_n であると呼ぶ．自然数上の任意の論理式は，ある n について，Σ_n 論理式と同値になる．したがって，自然数（算術）上の論理式の分類を与える，という点から，$(\Sigma_n, \Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ のことを**算術的階層** (*arithmetical hierarchy*) と呼ぶ．



リマーク (計算論と測度論)**.** 算術的階層の定義について，計算可能述語を含み，否定 $\neg$ と自然数上の量化 $\exists n \in \mathbb{N}$ を有限個組み合わせて作れる述語の族と考えることもできる．集合の文脈では，否定 $\neg$ は補集合 c，存在記号 $\exists$ は集合和 $\bigcup$ に対応していることは容易に分かる．したがって，算術的階層に属す集合たちの族は，

計算可能集合を含み，補集合 c と，ある種の可算和 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ を
有限個組み合わせて作れる集合たちの族

であると考えることができる．ところで，測度論に**ボレル集合**と呼ばれるものがある．これは，

開集合を含み，補集合演算と可算和演算で閉じた最小の集合族

に属す集合として定義される．一見すると，算術的階層とボレル集合の定義は似ているように感じるが，何か関連はあるのだろうか．それに対して，算術的階層とボレル集合には，本当に数学的に厳密な結び付きがある，と述べるものが，1955 年に発表されたアディソンの定理である．

Δ_2 と極限計算可能性が対応していたように，Δ_n は多重極限と対応する．つまり，Comp を計算可能関数全体の集合とすると，以下のような感じである．

$$A \text{ は } \Delta_3 \iff (\exists f \in \mathrm{Comp})(\forall n \in \mathbb{N})\ \left[A(n) = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to\infty} f(n,s,t)\right].$$

$$A \text{ は } \Delta_4 \iff (\exists f \in \mathrm{Comp})(\forall n \in \mathbb{N})\ \left[A(n) = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to\infty}\lim_{u\to\infty} f(n,s,t,u)\right].$$

$$A \text{ は } \Delta_5 \iff (\exists f \in \mathrm{Comp})(\forall n \in \mathbb{N})\ \left[A(n) = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to\infty}\lim_{u\to\infty}\lim_{v\to\infty} f(n,s,t,u,v)\right].$$

定義 1.28. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が極限計算可能であるとき，1 重極限計算可能であると言うことにする．$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が $n+1$ **重極限計算可能**であるとは，ある n 重極限計算可能関数 $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，以下が成立することを指す．

$$f(n) = \lim_{s\to\infty} \varphi(n,s).$$

リマーク． 解析学において，ベール階級という概念がある．これは，連続関数をベール 0 級と定義し，ベール n 級関数の列の各点極限をベール $n+1$ 級と定義するものである．計算可能性理論における n 重極限計算可能性と，解析学におけるベール n 級の概念には，数学的に厳密な意味でのある種の対応が存在する．

シェーンフィールドの極限補題は，算術的階層の一般のレベルで成立する．

定理 1.29 (シェーンフィールドの極限補題)**.** 任意の集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ について，次が成立する．

$$A \text{ は } \Delta_{n+1} \iff A \text{ は } n \text{ 重極限計算可能である．}$$

この証明もまた同様に，以下の選択原理を用いて導くことができる．

補題 1.30 (Σ_{n+1}-選択原理)**.** R が Σ_{n+1} 述語であるとする．このとき，

$$(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y < 2)\ R(x,y) \implies (\exists f \in \mathrm{Lim}^n)(\forall x \in \mathbb{N})\ R(x,f(x)).$$

ここで，Lim^n は n 重極限計算可能関数全体の集合とする．

証明は同様なので，省略する．

歴史的リマーク． 算術的階層は，1943 年にクリーネ，1947 年にモストフスキによって独立に導入された．また，算術的階層が崩壊しないこと，つまり，算術的階層のすべてのレベルに新しい集合が存在することもまた，クリーネとモストフスキによる．

今回は説明していない概念であるが，1948 年にポストは $\Delta_{n+1} = \Delta_1(\Sigma_n \cup \Pi_n)$ であること，および $\Sigma_{n+1} = \Sigma_1(\Pi_n)$ を証明している．

一般の算術的階層におけるシェーンフィールドの極限補題を証明したのも，1959 年のシェーンフィールドである．

リマーク (計算論 $\approx$ 測度論)**.** 1940 年代のモストフスキは「$\Sigma_1 \approx$ 解析集合」,「計算可能集合 $\approx$ ボレル集合」と考え，ポストの定理「$\Delta_1 =$ 計算可能」を**ススリンの定理**「解析かつ余解析 $=$ ボレル」のアナロジーであると考えた．しかし，1950 年代には，アディソンの発見より，計算可能集合をボレル集合のアナロジーと捉えるのは正確ではないと認識されるようになった．上で述べたように，ボレル集合と数学的に厳密に対応するのは，計算可能集合ではなく，算術的階層（正確には，超算術的階層）である．

そうすると，算術的階層は，ボレル可測性の階層であり，多重極限計算可能性の階層は，ベール階級の階層である．したがって，シェーンフィールドの補題「$\Delta_{n+1} = n$ 重極限計算可能」は，**ルベーグ-ハウスドルフ-バナッハの定理**「加法的ボレル $n+1$ 級かつ乗法的ボレル $n+1$ 級 $=$ ベール n 級」に対応する．

1.7. 算術的階層の具体例

定義 1.31. 問題のクラス Γ について，問題 A が Γ **困難** (Γ-*hard*) であるとは，任意の Γ 問題 B について，$B \leqslant_m A$ となることである．つまり，ある計算可能関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，

$$n \in B \iff f(n) \in A$$

が成立する．問題 A が Γ**-完全** (Γ-*complete*) であるとは，$A \in \Gamma$ かつ A が Γ 困難であることを指す．

注意. 計算量理論を学んだ人であれば，NP 完全，PSPACE 完全，EXPTIME 完全などを聞いたことがあると思われる．ただし，その場合には，困難性の定義において，多対一還元に計算量の適切な制約が付けられている．

ライスの定理より，プログラムに関する非自明な外延的性質は，すべて計算不可能であった．しかし，実は計算不可能性にもレベルというものがある．この具体例を述べるために，$\{\!\{e\}\!\}$ が，自然数 e でコードされたプログラムを表していたことを思い出そう．これを e 番目の部分計算可能関数と呼ぶ．$\{\!\{e\}\!\}_s(n)$ によって，プログラムを n ステップ目まで動かした段階の計算状況を表すものとする．このとき，次のような問題を考えよう．

1. 部分計算可能関数の停止性の判定問題.

$$(e,n) \in \mathsf{Halt} \iff \{\!\{e\}\!\}(n)\downarrow \iff (\exists s)\ \{\!\{e\}\!\}_s(n)\downarrow.$$

2. 部分計算可能関数の定義域が自然数全体であるかどうかの判定問題.

$$e \in \mathsf{Tot} \iff \mathrm{dom}(\{\!\{e\}\!\}) = \mathbb{N} \iff (\forall n)(\exists s)\ \{\!\{e\}\!\}_s(n)\downarrow.$$

3. 部分計算可能関数の定義域が有限であるかどうかの判定問題.

$$e \in \mathsf{Fin} \iff |\mathrm{dom}(\{\!\{e\}\!\})| < \infty \iff (\exists m)(\forall n \geqslant m)(\forall s)\ \{\!\{e\}\!\}_s(m)\uparrow.$$

4. 部分計算可能関数の定義域の補集合が有限であるかどうかの判定問題.

$$e \in \mathsf{Cof} \iff |\mathbb{N}\backslash\mathrm{dom}(\{\!\{e\}\!\})| < \infty \iff (\exists m)(\forall n \geqslant m)(\exists s)\ \{\!\{e\}\!\}_s(m)\downarrow.$$

5. 部分計算可能関数の定義域が計算可能であるかどうかの判定問題.

$$\begin{aligned} e \in \mathsf{Com} &\iff (\exists d \in \mathsf{Tot})\ \mathrm{dom}(\{\!\{e\}\!\}) = \{\!\{d\}\!\} \\ &\iff (\exists d)(\forall n)\ \big[(\{\!\{e\}\!\}(n)\downarrow \to\ \{\!\{d\}\!\}(n) = 1) \wedge (\{\!\{e\}\!\}(n)\uparrow \to\ \{\!\{d\}\!\}(n) = 0)\big]. \end{aligned}$$

6. 部分計算可能関数を全域計算可能関数に拡張可能であるかどうかの判定問題.

$$\begin{aligned} e \in \mathsf{Ext} &\iff (\exists d \in \mathsf{Tot})\ \{\!\{e\}\!\} \subseteq \{\!\{d\}\!\} \\ &\iff (\exists d \in \mathsf{Tot})(\forall n)\ [\{\!\{e\}\!\}(n)\downarrow \to\ \{\!\{d\}\!\}(n) = \{\!\{e\}\!\}(n)]. \end{aligned}$$

演習問題 1.32. Com および Ext が Σ_3 であることを証明せよ．

定理 1.33. 部分計算可能関数について，

1. 停止性の判定問題 Halt は Σ_1 完全である．
2. 定義域の全域性の判定問題 Tot は Π_2 完全である．
3. 定義域の有限性の判定問題 Fin は Σ_2 完全である．
4. 定義域の補集合の有限性の判定問題 Cof は Σ_3 完全である．
5. 定義域の計算可能性の判定問題 Com は Σ_3 完全である．
6. 全域関数への拡張可能性の判定問題 Ext は Σ_3 完全である．

Proof. (1) Halt は停止集合なので，命題 1.5 より Σ_1 である．同様に，命題 1.5 より，任意の Σ_1 集合 A について，部分計算可能関数 f が存在して，$A = \mathrm{dom}(f)$ であった．f のコードを e_f と表すと，

$$n \in A \iff f(n)\downarrow \iff (e_f, n) \in \mathsf{Halt}.$$

(2) Tot が Π_2 であることは，上に述べた論理式表示から分かる．Π_2 完全であることを示すために，A を Π_2 述語 $A(n) \equiv \forall a \exists b R(n,a,b)$ とする．部分計算可能関数 f_n は，次の動作を行う．

- 入力 a に対して，ステップ s で，$R(n,a,s)$ かどうかをチェックする．
- YES ならば，適当な値を出力し，計算を停止する．
- NO ならば，次のステップ $s+1$ に進む．

与えられた n に対して，f_n のコード $e(n)$ を計算可能な方法で容易に求めることができる．明らかに，$\exists b R(a,b) \iff f_n(a)\downarrow$ であるから，このとき，

$$n \in A \iff \forall a \exists b R(n,a,b) \iff \forall a\, f_n(a)\downarrow \iff e(n) \in \mathsf{Tot}.$$

(3) Fin が Σ_2 であることは，上に述べた論理式表示から分かる．Σ_2 完全であることを示すために，A を Σ_2 述語 $A(n) \equiv \exists a \forall b R(n,a,b)$ とする．部分計算可能関数 f_n は次の動作を行う．

- 入力 a に対して，ステップ s で，$(\forall a' \leqslant a)(\exists b \leqslant s)\, \neg R(n,a',b)$ かどうかをチェックする．
- YES ならば，適当な値を出力し，計算を停止する．
- NO ならば，次のステップ $s+1$ に進む．

与えられた n に対して，f_n のコード $e(n)$ を計算可能な方法で容易に求めることができる．$\forall a \exists b R(n,a,b)$ ならば，b_a を $R(n,a,b_a)$ なる最小のものとする．このとき，$b'_a = \max_{a' \leqslant a} b_a$ とすれば，$f_n(a)$ は第 b'_a ステップで停止することを容易に確認できる．つまり，任意の a について，$f_n(a)\downarrow$ であり，特に，定義域は無限である．一方，$\exists a \forall b R(n,a,b)$ ならば，$\forall b R(n,a_0,b)$ となる a_0 を取る．このとき，任意の入力 $a' \geqslant a_0$ について，最初の場合分けが YES になることは有り得

ない．よって，高々有限個の入力 a についてしか，$f_n(a)\downarrow$ になり得ないから，定義域は有限である．したがって，

$$n \in A \iff \exists a \forall b R(n,a,b) \iff f_n \text{ の定義域は有限} \iff e(n) \in \mathsf{Fin}.$$

(4) Cof が Σ_3 であることは，上に述べた論理式表示から分かる．Σ_3 完全であることを示すために，任意の Σ_3 述語 $A(n) = \exists a \forall b \exists c R(n,a,b,c)$ を取る．部分計算可能関数 f_n は次の動作を行う．

- 各 a について，$\exists c R(n,a,b,c)$ が判明した b の数が増えるかどうかを確認する．
- もし増えたら，f_n の現時点で計算が終了していない入力のうち，a 番目に小さいものを停止させる．

$n \in A$ の証拠となる最小の a を取ると，f_n の未定義な入力のうち a 番目に小さいものが停止する，という動作が無限回繰り返される．すると，ダルマ落とし式に，a 以上のすべての入力について，f_n 計算が停止する．$n \notin A$ とすると，各 a について，「f_n の未定義な入力のうち a 番目」がある有限の値 k_a に収束する．このとき，任意の a について，$f_n(k_a)$ は未定義になる．つまり，無限個の入力について，f_n は未定義である．

与えられた n に対して，f_n のコード $e(n)$ を計算可能な方法で容易に求めることができるから，

$$n \in A \iff \exists a \forall b \exists c R(n,a,b,c) \iff f_n \text{ の定義域の補集合は有限} \iff e(n) \in \mathsf{Cof}.$$

(5), (6) 省略する．証明はたとえば Soare を参照せよ． □

例 1.34 (群論における例)．群の有限表示が与えられているとする．

- 自明かどうかの判定は Σ_1 完全である．
- 捻れなしかどうかの判定は Π_2 完全である．
- 語の問題が決定できるかどうかの判定は Σ_3 完全である．

例 1.35 (解析学における例)．計算可能実連続関数 f が与えられているとする．

- 計算可能な導関数を持つかどうかの判定は Σ_3 完全である．
- 連続な導関数を持つかどうかの判定は Π_3 完全である．
- 微分方程式 $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$, $y(0) = 0$ が計算可能な解を持つかどうかの判定は Σ_3 完全である．