トポス理論と圏論的論理学への誘い

荒武 永史

京都大学大学院理学研究科
数学・数理解析専攻 数理解析系　博士後期課程 3 回
（日本学術振興会特別研究員 DC.）

2019 年 12 月 6 日
@数学基礎論若手の会 2019 in 岡崎

Introduction

"A startling aspect of topos theory is that it unifies two seemingly wholly distinct mathematical subjects:
on the one hand, **topology and algebraic geometry**, and on the other hand, **logic and set theory**."

— Mac Lane & Moerdijk,
Sheaves in Geometry and Logic 序文より

Contents

Contents of the Current Section

位相空間上の層

位相空間 X の開集合 U に対して、

$$\mathcal{F}(U) := \{\, f\colon U \to \mathbb{R}\ ;\ \text{連続函数}\,\}$$

とおく。開集合 $V \subseteq U$ に対して、**制限写像** $r_{UV}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ $(f \mapsto f|_V)$ が定まる。よって、X の開集合系が成す半順序集合を $\mathcal{O}(X)$ で表すとき、**反変函手** $\mathcal{F}\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が得られる。

さらに $\mathcal{F}$ は**貼り合わせ条件**という次の性質を持つ：

> $\forall U \in \mathcal{O}(X)$, $\forall \{U_i\}_i : U$ の開被覆, $\forall \{f_i\}_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ に対し、
> $\{f_i\}_i$ が $i \neq j \implies f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば、
> $\exists! f \in \mathcal{F}(U),\ \forall i,\ f|_{U_i} = f_i$

このような性質を持つ反変函手 $\mathcal{F}\colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことを、**X 上の層**という。層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ に対して、自然変換 $\alpha\colon \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ を**層の射**という。**X 上の層の圏**を $\mathbf{Sh}(X)$ で表す。

サイトと Grothendieck トポス

Grothendieck は、数論幾何における新しいコホモロジー論を構築するために、$\mathcal{O}(X)$ の代わりに**圏 $\mathcal{C}$ 上の層**の概念を定義した。ここでは $\mathcal{O}(X)$ の "開被覆" というデータに対応する、「$\mathcal{C}$ の **Grothendieck 被覆** J」というデータが与えられる。J は、各対象 $C \in \mathcal{C}$ に対し、C を codomain にもつような射の集合 S_λ の集まり $J(C)$ から成り、適切な公理を満たすもの：

$$J = \{J(C)\}_{C \in \mathcal{C}}, \quad J(C) = \{S_\lambda\}_\lambda, \quad S_\lambda = \{f_i \colon C_i \to C\}_i$$

組 $(\mathcal{C}, J)$ を **site** という。
$\rightsquigarrow$ 前層 $F \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対する貼り合わせ条件が記述でき、$(\mathcal{C}, J)$ 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ が切り出せる。

Definition

$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ の形の圏のことを **Grothendieck トポス**という。

Grothendieck トポスの性質

Proposition

$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ は“**Set** っぽい”以下の性質を持つ

- 任意の小極限・小余極限を持つ
- 像分解を持ち、それらは pullback で保たれる
- エピ射は正則エピ射で、よってバランス圏になっている
- exponential を持つ
- subobject classifier を持つ

また、包含函手 i は**層化函手** $\mathbf{a}$ を左随伴に持つ：

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \arrow[r, hook, shift right, "i"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \arrow[l, shift right, "\mathbf{a}"'] \end{tikzcd}$$

よって自然な函手 $\mathbf{ay} \colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ がある。

初等トポスの定義

Lawvere と Tierney は、トポスが **Set** と共通の性質を多く持つことに着目して、次の概念を得た：

Definition

locally small な圏 $\mathcal{E}$ が

- 有限完備
- exponential を持つ（デカルト閉圏）
- subobject classifier を持つ

を満たすとき、**初等トポス**という。

FinSet は初等トポスだが Grothendieck トポスではない。

Grothendieck トポスについて知られていた構成の多くは、初等トポスでもできる。また、初等トポスは **"集合の宇宙"** と見なせて、ここに論理学とのつながりが開かれた。

初等トポスの定義 (continued)

Definition

(1) $\mathcal{E}$ が **exponential** を持つとは、任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ に対して、直積函手 $(-) \times X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ の右随伴が存在することをいう。この右随伴を $(-)^X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ と表す。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y \times X, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(Y, Z^X)$$

(2) $\mathcal{E}$ の **subobject classifier** とは、対象 Ω と射 $\mathrm{true} \colon 1 \to \Omega$ の組 (Ω, true) であって、次の普遍性を持つようなもの：
任意の対象 X と**部分対象** $S \rightarrowtail X$ に対し、次の図を pullback にするような射 $\chi_S \colon X \to \Omega$ が一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{true}"] \\ X \arrow[r, dashed, "\chi_S"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Sub}(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X, \Omega)$$

初等トポスの性質

- 初等トポスは有限余完備
- 任意の射 $f\colon Y \to X$ は、像分解を持つ：（正則）エピ射とモノ射への分解 $Y \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\, f \rightarrowtail X$ で "最小のもの"

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads] & & X \\
& \mathrm{Im}\, f \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& S \arrow[dr, tail] & \\
Y \arrow[ur] \arrow[dr, two heads] & \exists & X \\
& \mathrm{Im}\, f \arrow[ur, tail] \arrow[uu, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

- 任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ について、スライス圏 $\mathcal{E}/X$ は初等トポス

Logical Operations in a Topos I: Heyting Structures

- $\mathrm{Sub}(X)$ は Heyting 代数の構造を持つ。meet と join は次の構成で得られる：

$$\begin{tikzcd} S \cap T \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & T \arrow[d, tail] \\ S \arrow[r, tail] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S + T \arrow[dr, two heads] & & T \arrow[ll] \arrow[dd, tail] \\ & S \cup T \arrow[dr, tail] & \\ S \arrow[uu] \arrow[rr, tail] & & X \end{tikzcd}$$

$S \Rightarrow T$ は $\mathcal{E}/X$ の exponential を用いて作られる。

- 射 $f\colon Y \to X$ に対し pullback 写像 $f^*\colon \mathrm{Sub}(X) \to \mathrm{Sub}(Y)$ は Heyting 代数の準同型。
- Ω には “internal Heyting algebra” の構造が入る。

$$\wedge, \vee, \Rightarrow\colon \Omega \times \Omega \to \Omega, \qquad \neg\colon \Omega \to \Omega$$

$\mathcal{E}$ が Grothendieck トポスのときは、$\mathrm{Sub}(X)$ は完備 Heyting 代数

Logical Operations in a Topos II: Quantifiers as Adjoints

- 像分解から射 $f\colon Y \to X$ による順像 $\exists_f\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, tail] & \exists_f S \arrow[d, dashed, tail] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

を得ると、$\exists_f$ は f^* の左随伴になる。
- さらに f^* は右随伴 $\forall_f\colon \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ も持つ。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(Y) \arrow[r, shift left=8, "\exists_f"] \arrow[r, shift right=8, "\forall_f"'] & \mathrm{Sub}(X) \arrow[l, "f^*"', "\perp" near end, "\perp"' near end] \end{tikzcd}$$

$$\exists_f S \leq T \iff S \leq f^* T$$

$$f^* T \leq S \iff T \leq \forall_f T$$

Local Operator

前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ から site $(\mathcal{C}, J)$ 上の層トポス $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ をつくる操作は、初等トポス $\mathcal{E}$ への一般化を持つ。

Definition

初等トポス $\mathcal{E}$ 上の **local operator** (a.k.a. Lawvere-Tierney 位相) とは、射 $j\colon \Omega \to \Omega$ であって次の図式を可換にするもの：

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\mathrm{true}"] \arrow[dr, "\mathrm{true}"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

local operator j が与えられると、「対象 $X \in \mathcal{E}$ が **j-層**」という性質が定義できる。j-層が成す部分トポスを $\mathcal{E}_j$ で表す。

特に重要なのが、**double-negation local operator** $\neg\neg\colon \Omega \to \Omega$ である。$\mathcal{E}_{\neg\neg}$ は Boolean トポス、*i.e.* $\mathrm{Sub}(X)$ が Boole 代数。

Local Operator vs. Grothendieck Coverage

Theorem

(1) 圏 $\mathcal{C}$ 上の Grothendieck 被覆 J と、前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ 上の local operator j は 1 対 1 に対応する。

(2) 上の主張において対応する J と j について、$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が J-層であることと j-層であることは同値。

Sketches of an Elephant

In his books *Sketches of an Elephant* (2002), Johnstone described as follows;

(i) 'A topos is a category of sheaves on a site'
(ii) 'A topos is a category with finite limits and power-objects'
(iii) 'A topos is (the embodiment of) an intuitionistic higher-order theory'
(iv) 'A topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory'
(v) 'A topos is a totally cocomplete object in the meta-2-category $\mathfrak{CART}$ of cartesian (i.e., finitely complete) categories'
(vi) 'A topos is a generalized space'
(vii) 'A topos is a semantics for intuitionistic formal systems'
(viii) 'A topos is a Morita equivalence class of continuous groupoids'
(ix) 'A topos is the category of maps of a power allegory'
(x) 'A topos is a category whose canonical indexing over itself is complete and well-powered'
(xi) 'A topos is the spatial manifestation of a Giraud frame'
(xii) 'A topos is a setting for synthetic differential geometry'
(xiii) 'A topos is a setting for synthetic domain theory'

Sketches of an Elephant

In his books *Sketches of an Elephant* (2002), Johnstone described as follows;

(i) **'A topos is a category of sheaves on a site'**
(ii) 'A topos is a category with finite limits and power-objects'
(iii) **'A topos is (the embodiment of) an intuitionistic higher-order theory'**
(iv) **'A topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory'**
(v) 'A topos is a totally cocomplete object in the meta-2-category $\mathfrak{CART}$ of cartesian (i.e., finitely complete) categories'
(vi) 'A topos is a generalized space'
(vii) 'A topos is a semantics for intuitionistic formal systems'
(viii) 'A topos is a Morita equivalence class of continuous groupoids'
(ix) 'A topos is the category of maps of a power allegory'
(x) 'A topos is a category whose canonical indexing over itself is complete and well-powered'
(xi) 'A topos is the spatial manifestation of a Giraud frame'
(xii) 'A topos is a setting for synthetic differential geometry'
(xiii) 'A topos is a setting for synthetic domain theory'

Two Logical Aspects of Toposes

ロジック的な視点からは、トポスには主に 2 つの側面がある

- Toposes as Mathematical Universes
  - “トポスの中で”数学的構造を考えられる
  - 集合論や型理論の圏論的解釈を与えられる
- Toposes as Theories
  - 理論とトポスが“対応する”（理論の分類トポス）
  - 理論のモデルは分類トポスからの函手と見なせる

同じトポスを様々な視点から調べられるのが最大の特徴！

Contents of the Current Section

Structures in a Category

一般の数学において、**圏における代数的対象**を考える場面は多い：

Definition (群対象)

$\mathcal{C}$ を有限直積を持つ圏とする。$\mathcal{C}$ における**群対象**とは、対象 G, 射 $m\colon G\times G\to G$, $e\colon 1\to G$, $i\colon G\to G$ の組 $\langle G,m,e,i\rangle$ であって、次の図式を可換にするようなもの：

結合法則

$$\begin{tikzcd}
(G\times G)\times G \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "m\times\mathrm{id}"'] & & G\times(G\times G) \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G & G\times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

逆元

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[ddl, "\langle i,\mathrm{id}\rangle"'] \arrow[d, "!_G"] \arrow[ddr, "\langle\mathrm{id},i\rangle"] & \\
& 1 \arrow[d, "e"] & \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G & G\times G \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

単位元

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\langle e\circ!_G,\mathrm{id}\rangle"] \arrow[d, "\langle\mathrm{id},e\circ!_G\rangle"'] \arrow[dr, equal] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
G\times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

原子論理式の解釈

$\mathcal{E}$ をトポス（or 以下を解釈するのに十分な構造を持つ圏）とする。
多ソート言語 $\mathcal{L}$ に対して、$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ は以下の割り当て：

- ソート A に対し、対象 $A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- 型 $\bar{A} \equiv A_1 \cdots A_n$ に対し、$\bar{A}^{\mathcal{M}} := A_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times A_n^{\mathcal{M}}$
- 定数記号 $c : A$ に対し、射 $c^{\mathcal{M}} : 1 \to A^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- 函数記号 $f : A_1 \cdots A_n \to B$ に対し、射 $f^{\mathcal{M}} : \bar{A}^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$
- 関係記号 $R : A_1 \cdots A_n$ に対し、部分対象 $R^{\mathcal{M}} \rightarrowtail \bar{A}^{\mathcal{M}} \in \mathcal{E}$

射の合成により帰納的に、項 $t : \bar{A} \to B$ の解釈 $t^{\mathcal{M}} : \bar{A}^{\mathcal{M}} \to B^{\mathcal{M}}$ が定まる。原子論理式 $R(t_1, \ldots, t_m)$, $s = t$ の解釈は、次の pullback を用いて得られる：

$$\begin{tikzcd} \llbracket R(\boldsymbol{t}) \rrbracket_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, tail] & R^{\mathcal{M}} \arrow[d, tail] \\ A_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times A_n^{\mathcal{M}} \arrow[r, "\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_m^{\mathcal{M}} \rangle"] & B_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times B_m^{\mathcal{M}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \llbracket s = t \rrbracket_{\mathcal{M}} \arrow[r] \arrow[d, tail] & B^{\mathcal{M}} \arrow[d, tail, "\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle"] \\ A_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times A_n^{\mathcal{M}} \arrow[r, "\langle s^{\mathcal{M}}, t^{\mathcal{M}} \rangle"] & B^{\mathcal{M}} \times B^{\mathcal{M}} \end{tikzcd}$$

論理結合子の解釈

論理結合子は部分対象が成す Heyting 代数 $\mathrm{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}})$ の構造を使って自然に解釈する。

$$[\![\varphi(\boldsymbol{x})]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\psi(\boldsymbol{x})]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}})$$
$$\rightsquigarrow [\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]_{\mathcal{M}} \in \mathrm{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}})$$

ここで $\varphi(\boldsymbol{x}) : \bar{A}$ に仮想的な自由変数 $\boldsymbol{y} : \bar{B}$ を追加するには、

$$\begin{tikzcd}
{[\![\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\!]_{\mathcal{M}}} \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & {[\![\varphi(\boldsymbol{x})]\!]_{\mathcal{M}}} \arrow[d, tail] \\
\bar{A}^{\mathcal{M}} \times \bar{B}^{\mathcal{M}} \arrow[r, "\mathrm{proj}_1"] & \bar{A}^{\mathcal{M}}
\end{tikzcd}$$

（一階の）量化記号の解釈

論理式 $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \bar{A}\bar{B}$ に対し、$[\![\exists \boldsymbol{y}\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\forall \boldsymbol{y}\psi]\!]_{\mathcal{M}}$ を次で定める：
射影 $\pi := \mathrm{proj}_1 : \bar{A}^{\mathcal{M}} \times \bar{B}^{\mathcal{M}} \to \bar{A}^{\mathcal{M}}$ から誘導される随伴

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathrm{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}} \times \bar{B}^{\mathcal{M}}) \arrow[r, shift left=8, "\exists_\pi"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\perp"] \arrow[r, shift right=8, "\forall_\pi"'] & \mathrm{Sub}(\bar{A}^{\mathcal{M}}) \arrow[l, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

により、$[\![\exists \boldsymbol{y}\psi]\!]_{\mathcal{M}} := \exists_\pi [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\forall \boldsymbol{y}\psi]\!]_{\mathcal{M}} := \forall_\pi [\![\psi]\!]_{\mathcal{M}}$ とおく。

以上で、構造 $\mathcal{M}$ における一階論理式の解釈 $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \rightarrowtail \bar{A}^{\mathcal{M}}$ が定義された。特に閉論理式からは $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M}} \rightarrowtail 1$ が得られる。**理論**や**モデル**も適当な意味で定義される。

$\mathcal{E}$ が Grothendieck トポスのときは、$\mathrm{Sub}(X)$ が完備 Heyting 代数なので、ある種の無限論理和 $\bigvee$ を含むような**幾何的論理**まで解釈することができる。

トポスの内部言語: Mitchell-Benabou language

今回は一般の高階論理の解釈ではなく、トポス $\mathcal{E}$ から得られる **Mitchell-Benabou language** $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ の解釈に限定して議論する。

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ は以下のデータから成る

- 基本ソートの集合 $\{\ulcorner X \urcorner ; X \in \mathcal{E}\}$
- 函数記号の集合 $\{\ulcorner f \urcorner : \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner Y \urcorner ; f : X \to Y \in \mathcal{E}\}$

項の生成規則：$s : \ulcorner U \urcorner \to \ulcorner X \urcorner, t : \ulcorner V \urcorner \to \ulcorner Y \urcorner$ を項とする。

- 変数 $x : \ulcorner X \urcorner$ に対し、項 $x : \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner X \urcorner$
- 函数記号 $\ulcorner f \urcorner : \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner Y \urcorner$ に対し、項 $\ulcorner f \urcorner \circ s : \ulcorner U \urcorner \to \ulcorner Y \urcorner$
- 項 $\langle s, t \rangle : \ulcorner U \times V \urcorner \to \ulcorner X \times Y \urcorner$
- $Y = X$ のとき、項 $(s = t) : \ulcorner U \times V \urcorner \to \ulcorner \Omega \urcorner$
- $Y = Z^X$ のとき、項 $t(s) : \ulcorner U \times V \urcorner \to \ulcorner Z \urcorner$　（函数の適用）

トポスの内部言語: Mitchell-Benabou language (continued)

- $Y = \Omega^X$ のとき、項 $(s \in t) : \ulcorner U \times V \urcorner \to \ulcorner \Omega \urcorner$
- $U = Y \times V$ のとき、変数 $y : \ulcorner Y \urcorner$ に対し、
  項 $(\lambda y.s) : \ulcorner V \urcorner \to \ulcorner X^Y \urcorner$　(Curry 化)

項 $t : \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner Y \urcorner$ は自然な解釈 $[\![t]\!]_{\mathcal{E}} : X \to Y$ を持つ。

Definition

$\varphi : \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner \Omega \urcorner$ の形の項を**論理式**という。
論理式の解釈 $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{E}} : X \to \Omega$ は X の部分対象と同一視できる。

Ω 上の internal Heyting 構造を用いて、論理式 φ, ψ に対し、
項 $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\exists y \varphi$, $\forall y \varphi$ の解釈が定まる。
(部分対象との同一視により、一階論理式の場合の構成法と等価)

“論理的な圏” から得られる言語を一般に**内部言語**という。

Kripke-Joyal 意味論

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ を用いてトポス $\mathcal{E}$ を調べる際には、次の意味論が用いられる。

Definition (Kripke-Joyal 意味論)

$\varphi\colon \ulcorner X \urcorner \to \ulcorner \Omega \urcorner$ と射 $\alpha\colon U \to X$ に対し、

$$U \Vdash \varphi(\alpha) \overset{\text{def.}}{\iff} \alpha \text{ が } [\![\varphi]\!] \rightarrowtail X \text{ を通して分解する}$$

Proposition

論理式 $\theta \equiv \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi, \exists y \varphi, \forall y \varphi$ に対する関係 $U \Vdash \theta(\alpha)$ は、φ, ψ に対する $\Vdash$ 関係を用いて表現できる。例えば、

- $U \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff 射 $p\colon V \to U$, $q\colon W \to U$ が存在して、$p + q\colon V + W \twoheadrightarrow U$ がエピ射かつ $V \Vdash \varphi(\alpha p)$ かつ $W \Vdash \psi(\alpha q)$
- $U \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$ iff エピ射 $p\colon V \twoheadrightarrow U$ と $\beta\colon V \to Y$ が存在して、$V \Vdash \varphi(\alpha p, \beta)$

Sheaf Semantics I: 前層圏の場合

$\mathcal{E}$ が Grothendieck トポス $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ の場合を考える。対象 $C \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathbf{ay}C \Vdash \varphi(\alpha)$ を簡単に $C \Vdash \varphi(\alpha)$ と書く。ここで $\alpha\colon \mathbf{ay}C \to X$ は $\alpha \in X(C)$ と対応することに注意。

特に $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}$ のときは、K-J 意味論について次が成り立つ：

- $C \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff $C \Vdash \varphi(\alpha)$ または $C \Vdash \psi(\alpha)$
- $C \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$ iff ある $\beta \in Y(C)$ が存在して $C \Vdash \varphi(\alpha, \beta)$

この場合は、直観主義論理に対する Kripke 意味論や、モデル理論における有限強制と関わりがある。

Sheaf Semantics II: Cohen トポスの場合

順序集合 $\mathbb{P}$ に対して、$\mathbf{Sh}(\mathbb{P}, \neg\neg) \simeq (\mathbf{Set}^{\mathbb{P}^{\mathrm{op}}})_{\neg\neg}$ を考える。
このとき K-J 意味論について次が成り立つ：

- $p \Vdash \varphi(\alpha) \vee \psi(\alpha)$ iff 任意の $q \leq p$ に対して、ある $r \leq q$ が存在して、$r \Vdash \varphi(\alpha \cdot r)$ または $r \Vdash \psi(\alpha \cdot r)$
- $p \Vdash \exists y \varphi(\alpha, y)$ iff 任意の $q \leq p$ に対して、ある $r \leq q$ と $\beta \in Y(r)$ が存在して、$r \Vdash \varphi(\alpha \cdot r, \beta)$

この場合は、Cohen の強制法に関わりがある。
$\rightsquigarrow$ 連続体仮説を満たさないトポスの構成など

この他にも、$\mathcal{E}$ が realizability topos（これは Grothendieck トポスではない）の場合などに K-J 意味論の応用がある。

また、圏論の命題を、内部言語に関する論理推論によって示すことができる。

Contents of the Current Section

Lawvere の函手的意味論

等式理論 T に対し、次のような **syntactic category** $\mathcal{C}_T$ を考える：

対象　$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_T) := \{ [n] \,;\, n \in \omega \}$（$[n]$ は形式的表現）

射　$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}([m],[n])$
$:= \{ (t_1, \ldots, t_n) \,;\, m$ 引数の項の n-tuples $\}/\!\sim$

ただしここで、$\boldsymbol{t} \sim \boldsymbol{s} \iff T \vdash \forall \boldsymbol{x} \bigwedge_i t_i(\boldsymbol{x}) = s_i(\boldsymbol{x})$

このとき、$\mathcal{C}_T$ は有限直積を持つ圏（$[n] = [1] \times \cdots \times [1]$）。

さらに、T-代数 $\mathcal{M}$ から

$$\boldsymbol{t} \colon [m] \to [n] \qquad \mapsto \qquad \boldsymbol{t}^{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M}^m \to \mathcal{M}^n$$

によって、直積を保つ函手 $F_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}$ が得られる。この対応 $\mathcal{M} \mapsto F_{\mathcal{M}}$ は次の圏同値を誘導：

$$T\text{-}\mathbf{Alg} \simeq \mathbf{FinProdFunc}(\mathcal{C}_T, \mathbf{Set})$$

一般に「**理論に圏を**」「**モデルに函手を**」対応させるような枠組みを**函手的意味論**という。どんな圏論的論理学においても、函手的意味論を構築するのが最初のステップになる。

一階述語論理の函手的意味論

以下では T は一階理論、$\mathcal{E}$ は Grothendieck トポスとする。先述した**トポス $\mathcal{E}$ における T-モデル**に対しても、等式理論と同様のことができる。例えば、T が cartesian logic と呼ばれる断片で記述されているとき、syntactic category $\mathcal{C}_T$ を

対象 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_T) := \{\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,;$ 論理式 $\}$

射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\varphi(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{y})) := \{\, \chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,;$ 函数論理式 $\}/\!\sim$

ここで、論理式 $\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が**函数論理式**であるとは、

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} [\chi \to \varphi \wedge \psi], \quad \forall \boldsymbol{x} [\varphi \to \exists \boldsymbol{y} \chi]$$

が T から証明可能であることをいう。

で定めると、「定義可能集合を取る函手」を得る対応により、

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{Lex}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E})$$

ただし、左辺は $\mathcal{E}$ における T-モデルと準同型の圏、右辺は有限極限を保つ函手と自然変換の圏。

Gödel の完全性

syntactic category $\mathcal{C}_T$ は、T からの証明可能性の情報を持つ：

$$T \vdash \varphi \iff \text{射 } \varphi \rightarrowtail (\forall \boldsymbol{x}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}) \text{ が同型射}$$

そこで、Gödel の完全性定理は函手的意味論を介して次のような圏論的命題と対応する：

（適当な圏論的構造を保つ）函手の族 $\{F_i \colon \mathcal{C}_T \to \mathbf{Set}\}_i$ が存在して、任意の射 $f \in \mathcal{C}_T$ に対し、

$$\forall i, F_i(f) \text{ が同型射} \implies f \text{ 自身が同型射}$$

このように、ロジック的現象を圏論的に表現することで論理と圏論の関係性を調べることが、圏論的論理学に通底する目標である。

一階理論の分類トポス

分類トポスの概念により、理論を Mathematical Universe としてのトポスと同じ土俵に持っていける：syntactic category $\mathcal{C}_T$ 上に適当な Grothendieck 被覆 J_T を与えると、**J_T-連続な函手** $F\colon \mathcal{C}_T \to \mathcal{E}$ から**トポスの幾何的射** $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T) \to \mathcal{E}$ が得られる。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T) \arrow[dr, dashed] & \\ \mathcal{C}_T \arrow[u, "\mathbf{ay}"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

J_T-連続性が極限の保存などに対応するように J_T を構成しておけば、次の圏同値が得られる：

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{Cont}_{J_T}(\mathcal{C}_T, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Geom}^*(\mathbf{Sh}(\mathcal{C}_T, J_T), \mathcal{E})$$

ここで $\mathbf{Geom}^*(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ は幾何的射と幾何的変換の圏。このような普遍性を持つトポスを **T の分類トポス**といい、$\mathbf{Set}[T]$ で表す。

分類トポスと内部言語

Grothendieck トポス $\mathcal{E}$ に対しては、M-B language とは異なる**一階の内部言語**およびその上の**幾何的理論** $T_{\mathcal{E}}$ を構成でき、

$$\mathcal{E} \simeq \mathbf{Set}[T_{\mathcal{E}}], \quad \mathbf{Geom}^*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq T_{\mathcal{E}}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{F})$$

分類トポス・内部言語を介して幾何的理論とトポスを行き来して、ロジック $\leftrightarrow$ 圏論と双方向の応用が可能になる

- ロジック $\to$ 圏論の例：連結で原子的な点無しトポスの構成
- 圏論 $\to$ ロジックの例：Deligne の定理と完全性定理

cf. 高階理論の場合、理論 T から初等トポス $\mathcal{E}_T$ が与えられ、トポス $\mathcal{F}$ における T のモデルは**トポスの論理的射** $\mathcal{E}_T \to \mathcal{F}$ に対応する

$$T\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{F}) \simeq \mathbf{Log}(\mathcal{E}_T, \mathcal{F})$$

また、M-B language $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}$ は、$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_T$ なる高階理論 T を記述するのに用いられる。

分類トポスとモデル理論

- Makkai: 完全性定理、圏の埋め込み定理とタイプ排除
- Blass & Scedrov: Boolean coherent classifying topos と理論の可算範疇性、existentially closed model/finite-generic model の分類トポスの構成
- Caramello: 理論の性質と分類トポスの性質の関連、Fraisse 構成の圏論的一般化、可算均質モデルの自己同型群についてのガロア理論 etc.

参考文献

[1] O. Caramello. **Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'**. Oxford University Press, 2018.

[2] P. T. Johnstone. **Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium**. 2 vols. Oxford Logic Guides 43,44. Clarendon Press, 2002.

[3] S. Mac Lane and I. Moerdijk. **Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory**. Universitext. Springer-Verlag, 1992.