弱ケーニヒの補題が成り立たない世界での実連続関数

五十里 大将

東北大学 理学研究科 数学専攻

2019 年 12 月 7 日

逆 (定理 $\to$ 公理) 証明の例えばココがおもしろい！

- 公理が本質的に使われているかが分かる
- 公理の否定から破壊的活動が行える
- 破壊的世界の中での秩序が見られる
  $\to$ 自分の知らない数学に出会える！

逆 (定理 $\rightarrow$ 公理) 証明の例えばココがおもしろい！

- 公理が本質的に使われているかが分かる
- 公理の否定から破壊的活動が行える
- 破壊的世界の中での秩序が見られる
  $\rightarrow$ 自分の知らない数学に出会える！

逆 (定理 → 公理) 証明の例えばココがおもしろい！

- 公理が本質的に使われているかが分かる
- 公理の否定から破壊的活動が行える
- 破壊的世界の中での秩序が見られる
  → 自分の知らない数学に出会える！

逆 (定理 $\rightarrow$ 公理) 証明の例えばココがおもしろい！

- 公理が本質的に使われているかが分かる
- 公理の否定から破壊的活動が行える
- 破壊的世界の中での秩序が見られる
  $\rightarrow$ 自分の知らない数学に出会える！

WKL_0 の定義

定義

$\mathrm{WKL}_0 = \mathrm{RCA}_0 +$ “無限二進木は無限道を持つ”

再帰的無限道を持たない再帰的無限木の存在から，
WKL_0 は RCA_0 より真に強い．

事実

$\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{WKL}_0 \to$ [0,1] のコンパクト性

RCA$_0$ における実連続関数の定義

定義

集合 $\Phi \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ が以下の 3 条件を満たすとき，Φ を連続関数 (のコード) という．ただし，$(a, r)\Phi(b, s)$ は $\exists n \in \mathbb{N}(n, a, r, b, s) \in \Phi$ の略記とする．

(1) $(a, r)\Phi(b, s)$ *and* $(a, r)\Phi(b', s') \Rightarrow |b - b'| \leq s + s'$
(2) $(a, r)\Phi(b, s)$ *and* $|a - a'| + r' < r \Rightarrow (a', r')\Phi(b, s)$
(3) $(a, r)\Phi(b, s)$ *and* $|b' - b| + r < r' \Rightarrow (a, r)\Phi(b', s')$

実数 x が次を満たすとき，Φ の定義域に属する ($x \in$domΦ) という．
$\forall q \in \mathbb{Q}^+ \exists (a, r)\Phi(b, s)\ |x - a| < r \wedge s < q$

$x \in$domΦ のとき，$\forall (a, r)\Phi(b, s)(|x - a| < r \rightarrow |y - b| \leq s)$ を満たす実数 y が一意に存在することが示せる．この y を $\Phi(x)$，または適当に $f(x)$ などと表記する．

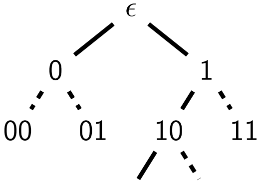
注意:Φ が関数 f をコードしているとすると，直観的には Φ は $f((a - r, a + r)) \subseteq [b - s, b + s]$ を満たす区間対のデータを持つ．

主定理 (おかしな連続関数)，証明の概略 1

定理

$\mathsf{RCA}_0 \vdash \mathsf{WKL}_0 \leftrightarrow [0,1]$ 上の連続関数には上限を与える入力が存在する

$(\leftarrow)$ の証明では，弱ケーニヒの補題を否定して得た木 T を利用して，
$[0,1]$ 上で上限を実現しない連続関数を作る．具体的には以下の通り．
$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ を，無限道を持たない無限木とし，
$\tilde{T} = \{t \in 2^{<\mathbb{N}} : t \notin T \wedge \forall s \subsetneq t, s \in T\}$ とする (T に属さない極小の列)．
二進有限列 s に対し，$a_s = \sum_{i<l(s)} \frac{s(i)}{2^{i+1}}$，$b_s = a_s + \frac{1}{2^{l(s)}}$ と定めておくと，
閉区間列 $\{[a_s, b_s]\}_{s \in \tilde{T}}$ は次の性質を満たす．



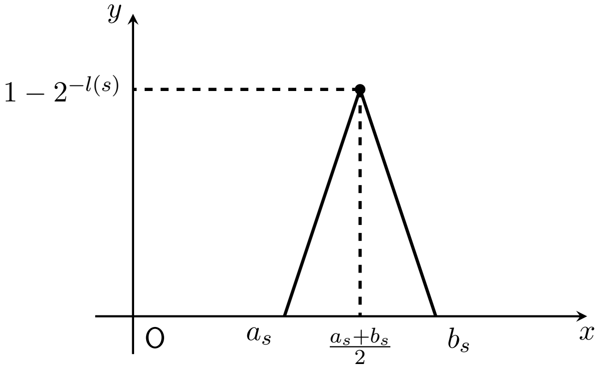
証明の概略 2

- $[0,1]$ を埋め尽くす
- 任意の $q \in \mathbb{Q}^+$ に対し，幅が q 未満の区間が存在する
- 互いに交わらないか，端点同士で一点のみを共有する
- 無限個の区間が "詰まる" 場所 ("端点集積箇所") が無い

これを利用し，$[0,1]$ 上の連続関数 f を次のように定める．

$$f(x) = \begin{cases} (1-2^{-l(s)})^{\frac{2(x-a_s)}{b_s-a_s}} & \left(a_s \leq x \leq \frac{a_s+b_s}{2} \right) \\ (1-2^{-l(s)})^{\frac{2(b_s-x)}{b_s-a_s}} & \left(\frac{a_s+b_s}{2} \leq x \leq b_s \right) \end{cases}$$

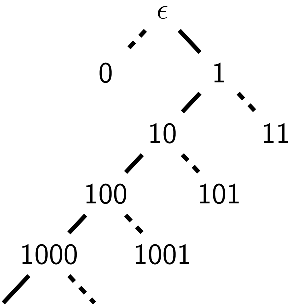
すなわち，分割区間上で対応する $s \in \tilde{T}$ の長さ l に対し $1-2^{-l}$ を高さに持つ山型折れ線を繋げて作る.



$\{[a_s, b_s]\}_{s\in\tilde{T}}$ の満たす性質から f は連続関数になるが，上限 1 を実現しない.

諸注意 1

注意 1
T に無限道があると，少なくともこの議論は通用しない.
というのも，無限道が通る部分によって $\{[a_s, b_s]\}_{s\in\tilde{T}}$ に “穴” が空く上に，穴の付近には無限個の区間が “詰まった” 状態になっていて，そこでは連続にはできない (下図の木が例として分かりやすい).



諸注意 2

注意 2
各区間での高さを変えることによって，f に別のおかしな性質を持たせることもできる．
例えば $l(s)$ にすることで，f を [0,1] 上で非有界な連続関数にできる．

注意 3
この主張中の「連続関数」は「一様連続関数」に置き換えられる．
その場合は証明を修正する必要がある．

“通常の” 数学との対応

定理 (Specker,1959)

[0,1] 上の再帰的実連続関数で、再帰的実数では最大値を実現しないものが存在する

証明は再帰的無限道のない再帰的無限木の存在に依る (らしい)

RCA_0 上の実数 $\simeq$ 計算可能実数
RCA_0 上のおかしな連続関数 (のコード)$\simeq$ おかしな計算可能実連続関数

RCA_0 でも証明できる連続関数の性質

- $[0,1]$ 上の中間値の定理

  証明は二分法による.

- $[0,1]$ 上の平均値の定理

  証明は Hardin, Velleman を参照.
  ただし導関数/微分係数の扱いに注意. 主張中には導関数という言葉が現れず、各点で微分係数が存在という表現になっている.
  $\rightarrow$ 導関数に対応する連続関数がありそうな場合でも, その連続関数としてのコードが存在するとは限らない.
  実際, 以下が成り立つことが知られている (Yokoyama).
  $\mathsf{ACA}_0 \leftrightarrow (-1,1)$ 上連続微分可能な関数の導関数のコードが存在

興味を持ってくれたあなたへ

実際にはもっと気にするところがたくさんある

- 適切な形式化か?
- 定義や証明技法が体系内で表現可能か?
- 体系内の概念か体系外の概念か?
- 連続関数のコードはどう作ればよいか?…etc

そんなあなたに『数学基礎論序説』

- 田中一之先生 (東北大) の新作
- 長らく絶版だった『数の体系と超準モデル』に加筆修正を施した力作
  → 『逆数学と二階算術』の内容もかなり含む
- 1 階論理の基本から逆数学の導入，果ては少々発展的な内容までカバー
  → 日本語で逆数学に関するまとまった記述のある貴重な一冊
- 高い (5400 円+税)
  → 大学生協で裳華房フェア (2 割引) がやっているかも……
  (東北大は 12/27 まで)

そんなあなたに『数学基礎論序説』

- 田中一之先生 (東北大) の新作
- 長らく絶版だった『数の体系と超準モデル』に加筆修正を施した力作
  $\to$『逆数学と二階算術』の内容もかなり含む
- 1 階論理の基本から逆数学の導入，果ては少々発展的な内容までカバー
  $\to$ 日本語で逆数学に関するまとまった記述のある貴重な一冊
- 高い (5400 円+税)
  $\to$ 大学生協で裳華房フェア (2 割引) がやっているかも……
  (東北大は 12/27 まで)

そんなあなたに『数学基礎論序説』

- 田中一之先生 (東北大) の新作
- 長らく絶版だった『数の体系と超準モデル』に加筆修正を施した力作
  $\to$『逆数学と二階算術』の内容もかなり含む
- 1 階論理の基本から逆数学の導入，果ては少々発展的な内容までカバー
  $\to$ 日本語で逆数学に関するまとまった記述のある貴重な一冊
- 高い (5400 円+税)
  $\to$ 大学生協で裳華房フェア (2 割引) がやっているかも……
  (東北大は 12/27 まで)

そんなあなたに『数学基礎論序説』

- 田中一之先生 (東北大) の新作
- 長らく絶版だった『数の体系と超準モデル』に加筆修正を施した力作
  $\rightarrow$『逆数学と二階算術』の内容もかなり含む
- 1 階論理の基本から逆数学の導入，果ては少々発展的な内容までカバー
  $\rightarrow$ 日本語で逆数学に関するまとまった記述のある貴重な一冊
- 高い (5400 円+税)
  $\rightarrow$ 大学生協で裳華房フェア (2 割引) がやっているかも……
  (東北大は 12/27 まで)

そんなあなたに『数学基礎論序説』

- 田中一之先生 (東北大) の新作
- 長らく絶版だった『数の体系と超準モデル』に加筆修正を施した力作
  $\rightarrow$『逆数学と二階算術』の内容もかなり含む
- 1 階論理の基本から逆数学の導入，果ては少々発展的な内容までカバー
  $\rightarrow$ 日本語で逆数学に関するまとまった記述のある貴重な一冊
- 高い (5400 円+税)
  $\rightarrow$ 大学生協で裳華房フェア (2 割引) がやっているかも……
  (東北大は 12/27 まで)

『山の上のロジック学園』もあるよ！

- 雑誌『数学セミナー』の連載を書籍化
- 内容は不完全性定理あたりまで
- 物語調で書かれていて愉快
- 登場人物がとても可愛い (作画:バラマツ ヒトミ)

『山の上のロジック学園』もあるよ！

- 雑誌『数学セミナー』の連載を書籍化
- 内容は不完全性定理あたりまで
- 物語調で書かれていて愉快
- 登場人物がとても可愛い (作画:バラマツ ヒトミ)

『山の上のロジック学園』もあるよ！

- 雑誌『数学セミナー』の連載を書籍化
- 内容は不完全性定理あたりまで
- 物語調で書かれていて愉快
- 登場人物がとても可愛い (作画:バラマツ ヒトミ)

『山の上のロジック学園』もあるよ！

- 雑誌『数学セミナー』の連載を書籍化
- 内容は不完全性定理あたりまで
- 物語調で書かれていて愉快
- 登場人物がとても可愛い (作画:バラマツ ヒトミ)

参考文献

- S.G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. 2nd edition, Cambridge University Press, 2009.
- 田中一之『数学基礎論序説-数の体系への論理的アプローチ-』, 裳華房, 2019.
- ジョン・スティルウェル著, 田中一之監訳・解説, 川辺治之訳『逆数学-定理から公理を「証明」する-』, 森北出版, 2019.
- C.S.Hardin, D.J.Velleman. *The mean value theorem in second order arithmetic*. The Journal of Symbolic Logic, vol.55, no.3, September 2001, pp.1356-1358.
- K. Yokoyama. *Standard and Non-Standard Analysis in Second Order Arithmetic*. 博士論文, 東北大学, 2007.
- E.Specker. *Der Satz vom Maximum in der rekursiven Analysis*. Constructivity in Mathematics (edited by A.Hyting). Studies in Logic and Foundation of Mathematics, p254-265, North-Holland, 1959.