第二不完全性定理について

倉橋太志
木更津工業高等専門学校

数学基礎論若手の会 **2019**
愛知県青年の家
2019 年 **12** 月 **7** 日

はじめに

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な理論とすると，T の無矛盾性を表す文 Con_T は T において証明できない．

- 一方，T の無矛盾性を表すと考えられる文で，T において証明可能なものもある（Kreisel の注意）．
- 第二不完全性定理の正確な主張には，Con_T に関する条件が必要 (導出可能性条件).

本発表の目標

- 無矛盾性を表す文 Con_T の選び方
- 様々な導出可能性条件

を詳しく分析することで，第二不完全性定理を取り巻く状況を明らかにする．

はじめに

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な理論とすると，T の無矛盾性を表す文 Con_T は T において証明できない．

- 一方，T の無矛盾性を表すと考えられる文で，T において証明可能なものもある（**Kreisel の注意**）．
- 第二不完全性定理の正確な主張には，Con_T に関する条件が必要 (導出可能性条件).

本発表の目標

- 無矛盾性を表す文 Con_T の選び方
- 様々な導出可能性条件

を詳しく分析することで，第二不完全性定理を取り巻く状況を明らかにする．

はじめに

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な理論とすると，T の無矛盾性を表す文 Con_T は T において証明できない．

- 一方，T の無矛盾性を表すと考えられる文で，T において証明可能なものもある（**Kreisel** の注意）．
- 第二不完全性定理の正確な主張には，Con_T に関する条件が必要 (導出可能性条件).

本発表の目標

- 無矛盾性を表す文 Con_T の選び方
- 様々な導出可能性条件

を詳しく分析することで，第二不完全性定理を取り巻く状況を明らかにする．

はじめに

第二不完全性定理 (Gödel, 1931)

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な理論とすると，T の無矛盾性を表す文 Con_T は T において証明できない．

- 一方，T の無矛盾性を表すと考えられる文で，T において証明可能なものもある（**Kreisel** の注意）.
- 第二不完全性定理の正確な主張には，Con_T に関する条件が必要 **(**導出可能性条件**)**.

本発表の目標

- 無矛盾性を表す文 Con_T の選び方
- 様々な導出可能性条件

を詳しく分析することで，第二不完全性定理を取り巻く状況を明らかにする．

アウトライン

1. 証明と **Kreisel** の注意
2. 様々な第二不完全性定理
3. 導出可能性条件
4. 研究成果

アウトライン

1. **証明と Kreisel の注意**
    1. 第二不完全性定理の証明
    2. **Kreisel** の注意
2. 様々な第二不完全性定理
3. 導出可能性条件
4. 研究成果

Gödel 数化と証明可能性述語

項，論理式，論理式の列，などは全て記号の有限列，または有限列の有限列なので，自然数を用いてコーディングできる（**Gödel** 数化）.

1. 論理式 φ の **Gödel** 数に対応する数項を $\ulcorner \varphi \urcorner$ とかく.
2. “x は論理式の **Gödel** 数” を表す論理式 $\mathrm{Fml}(x)$

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な $\mathcal{L}_A$-理論とする.

定理

次の条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する：
任意の論理式 φ について，$\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \iff T \vdash \varphi$.

定義（証明可能性述語）

定理の条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を，T の証明可能性述語という.

Gödel 数化と証明可能性述語

項，論理式，論理式の列，などは全て記号の有限列，または有限列の有限列なので，自然数を用いてコーディングできる（**Gödel** 数化）.

1. 論理式 φ の **Gödel** 数に対応する数項を $\ulcorner\varphi\urcorner$ とかく.
2. “x は論理式の **Gödel** 数” を表す論理式 $\mathrm{Fml}(x)$

T をペアノ算術 PA を含む，再帰的に公理化された無矛盾な $\mathcal{L}_A$-理論とする.

定理

次の条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する：
任意の論理式 φ について，$\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \iff T \vdash \varphi$.

定義（証明可能性述語）

定理の条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ を，T の証明可能性述語という.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ (**T の Gödel 文**) をとる.
- もし $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- Σ_1-完全性定理より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg \varphi$ なので T は矛盾する.
- すなわち T が無矛盾ならば $T \nvdash \varphi$.

ここまでの証明を T の中で実行すれば第二不完全性定理が得られる.
Con_T を $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と定める.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \varphi$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T$ なら $T \vdash \varphi$ なのでおかしい. $T \nvdash \mathrm{Con}_T$. □

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を満たす文 φ (T の **Gödel** 文) をとる.
- もし $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- Σ_1-完全性定理より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- $T \vdash \neg\varphi$ なので T は矛盾する.
- すなわち T が無矛盾ならば $T \nvdash \varphi$.

ここまでの証明を T の中で実行すれば第二不完全性定理が得られる.

Con_T を $\neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と定める.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg\mathrm{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \varphi$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T$ なら $T \vdash \varphi$ なのでおかしい. $T \nvdash \mathrm{Con}_T$. □

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす文 φ (T の **Gödel 文**) をとる.
- もし $T \vdash \varphi$ ならば $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- Σ_1-完全性定理より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \neg \varphi$ なので T は矛盾する.
- すなわち T が無矛盾ならば $T \nvdash \varphi$.

ここまでの証明を T の中で実行すれば第二不完全性定理が得られる.
Con_T を $\neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ と定める.

第二不完全性定理の証明

- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T \to \varphi$.
- $T \vdash \mathrm{Con}_T$ なら $T \vdash \varphi$ なのでおかしい. $T \nvdash \mathrm{Con}_T$. $\square$

Kreisel の注意

$T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を示すには，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の証明可能性述語であるだけでは不十分．

Kreisel の注意

$T \vdash \mathrm{Con}_T$ となるような T の証明可能性述語が存在する．

- **G. Kreisel, Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof,** *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 14-21 August 1958* **(1960), pp.298–299.**
- **前原昭二,** 数学基礎論入門**, 朝倉書店 (1977).**
- **前原昭二, 第 2 不完全性定理の内容的解釈,** 科学基礎論研究**, vol.20 (1991), no.3, pp.143–147.**

導出可能性条件

$T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を示すために十分な条件を明確にすればよい．

導出可能性条件 (derivability conditions)

1. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
2. $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
3. $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

現代の第二不完全性定理の標準的な証明は，**Gödel** の方法で作った $\mathrm{Pr}_T(x)$ がこの導出可能性条件を満たすことを確認し，$T \nvdash \mathrm{Con}_T$ を示すもの．

ここまでが第二不完全性定理についてよく知られていること．

導出可能性条件

$T \vdash \mathrm{Con}_T \to \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を示すために十分な条件を明確にすればよい．

導出可能性条件 (derivability conditions)

1. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$
2. $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$
3. $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

現代の第二不完全性定理の標準的な証明は，**Gödel** の方法で作った $\mathrm{Pr}_T(x)$ がこの導出可能性条件を満たすことを確認し，$T \nvdash \mathrm{Con}_T$ を示すもの．

ここまでが第二不完全性定理についてよく知られていること．

アウトライン

1. 証明と **Kreisel** の注意
2. 様々な第二不完全性定理
    1. **Gödel (1931)**
    2. **Hilbert and Bernays (1939)**
    3. **Löb (1955)**
    4. **Jeroslow (1973)**
    5. **Montagna (1979)**
    6. **Buchholz (1993)**
3. 導出可能性条件
4. 研究成果

Gödel (1931)

第二不完全性定理 (G2)

$T \nvdash \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

- ただし **Gödel** の証明は，第一不完全性定理の証明を形式化すればよい，という程度のもので，肝心の形式化は実行していない．
- それらの詳細を記述したものを続いて出版すると論文には書いてあるが，結局は出版されることはなかった．

Hilbert and Bernays (1939)

- **G2** の最初の詳細な証明は **Hilbert and Bernays** による本 *Grundlagen der Mathematik* の第二巻で与えられた.
- 特に彼らは, $\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件 **HB1**, **HB2**, **HB3** を満たすならば $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となることを示した.

Hilbert-Bernays の導出可能性条件

HB1 $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

HB2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(x) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

HB3 全ての原始再帰的な項 $t(x)$ について
$T \vdash t(x) = 0 \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner t(\dot{x}) = 0 \urcorner)$.

ここで $\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner$ は n から $\varphi(\overline{n})$ の **Gödel** 数を計算する原始再帰的関数に対応する項.

Hilbert and Bernays (1939)

- **G2** の最初の詳細な証明は **Hilbert and Bernays** による本 *Grundlagen der Mathematik* の第二巻で与えられた.
- 特に彼らは, $\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件 **HB1, HB2, HB3** を満たすならば $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となることを示した.

Hilbert-Bernays の導出可能性条件

HB1 $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

HB2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(x) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

HB3 全ての原始再帰的な項 $t(x)$ について
$T \vdash t(x) = 0 \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner t(\dot{x}) = 0 \urcorner)$.

ここで $\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner$ は n から $\varphi(\overline{n})$ の **Gödel** 数を計算する原始再帰的関数に対応する項.

Löb (1955)

- **Löb** は $\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の条件 **D1, D2, D3** を満たすなら，**Löb** の定理が成立することを証明し，
  このとき $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる（**G2** の最もよく知られた形）.

Löb の導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

全ての $\mathrm{Pr}_T(x)$ は自動的に **D1** を満たす.

M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *JSL*, vol. 20 (1955), no.2, pp.115–118.

Jeroslow (1973)

- **Jeroslow** は **Löb** の条件の $\mathbf{D3}$ を次の $\mathbf{\Sigma_1 C}$ に強めれば，$\mathbf{D2}$ が不要となることを示した（と読める）.
- すなわち，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が $\mathbf{D1}$ と $\mathbf{\Sigma_1 C}$ を満たせば $T \nvdash \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$ となる.

形式化された Σ_1-完全性

$\mathbf{\Sigma_1 C}$ φ が Σ_1 文ならば $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

R. G. Jeroslow, Redundancies in the Hilbert-Bernays derivability conditions for Gödel's second incompleteness theorem, *JSL*, vol.38 (1973), no.3, pp.359–367.

Montagna (1979)

- **Montagna** は $\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の２条件を満たせば **Löb** の定理が成り立つことを示した.
- このとき特に $T \nvdash \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$ である.

Montagna の条件

- $T \vdash \forall x($“x は論理公理”$\to \mathrm{Pr}_T(x))$.
- $T \vdash \forall x \forall y(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Fml}(y) \to (\mathrm{Pr}_T(x \dot{\to} y) \to (\mathrm{Pr}_T(x) \to \mathrm{Pr}_T(y))))$.

F. Montagna, On the formulas of Peano arithmetic which are provably closed under modus ponens, ***Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*****, vol.16 (1979), no.B5, pp.196–211.**

Buchholz (1993)

- **Buchholz** の講義テキストにおいて，$\mathrm{Pr}_T(x)$ が次の $\mathbf{D1^U}$ と $\mathbf{D2^U}$ を満たせば $\mathbf{\Sigma_1 C^U}$ が成立することが示されている．
- このとき $T \nvdash \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ となる．

Buchholz の条件

$\mathbf{D1^U}$ $T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

$\mathbf{D2^U}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner))$.

$\mathbf{\Sigma_1 C^U}$ $\varphi(x)$ が Σ_1 論理式ならば $T \vdash \varphi(x) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

W. Buchholz, ***Mathematische Logik II,***
`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~buchholz/articles/LogikII.ps`
(1993).

これらの異なる **G2** たちは異なる結論を持っている.

無矛盾性を表す異なる文

- $\mathrm{Con}_T^H :\equiv \forall x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$
- $\mathrm{Con}_T^L :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\mathrm{Con}_T^G :\equiv \exists x(\mathrm{Fml}(x) \wedge \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

異なる結論

Gödel	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Hilbert-Bernays	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Löb	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$
Jeroslow	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Montagna	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Buchholz	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^H \to \mathrm{Con}_T^L$ と $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^L \to \mathrm{Con}_T^G$.
- これらをとりまく状況を明らかにしたい.

これらの異なる **G2** たちは異なる結論を持っている.

無矛盾性を表す異なる文

- $\mathrm{Con}_T^H :\equiv \forall x(\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Pr}_T(x) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\dot{\neg} x))$
- $\mathrm{Con}_T^L :\equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$
- $\mathrm{Con}_T^G :\equiv \exists x(\mathrm{Fml}(x) \land \neg \mathrm{Pr}_T(x))$

異なる結論

Gödel	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Hilbert-Bernays	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Löb	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$
Jeroslow	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
Montagna	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$
Buchholz	$T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

- $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^H \to \mathrm{Con}_T^L$ と $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}_T^L \to \mathrm{Con}_T^G$.
- これらをとりまく状況を明らかにしたい.

1. 証明と **Kreisel** の注意
2. 様々な第二不完全性定理
3. 導出可能性条件
    1. **local** な導出可能性条件
    2. **uniform** な導出可能性条件
    3. **global** な導出可能性条件
4. 研究成果

Local な導出可能性条件

Local な導出可能性条件

D1 $T \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

D2 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$.

D3 $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

ΓC φ が Γ 文ならば $T \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

$\mathbf{B_2}$ $T \vdash \varphi \to \psi \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$.

PC $T \vdash \mathrm{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

Uniform な導出可能性条件

Uniform な導出可能性条件

D1$^{\mathbf{U}}$ $T \vdash \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

D2$^{\mathbf{U}}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \to \psi(\dot{x}) \urcorner) \to (\mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner))$.

D3$^{\mathbf{U}}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \urcorner)$.

ΓC$^{\mathbf{U}}$ $\varphi(x)$ が Γ 論理式ならば $T \vdash \varphi(x) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

B$_2^{\mathbf{U}}$ $T \vdash \varphi(x) \to \psi(x) \Rightarrow T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \psi(\dot{x}) \urcorner)$.

PC$^{\mathbf{U}}$ $T \vdash \mathrm{Pr}_\emptyset(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

CB $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \forall x\, \varphi(x) \urcorner) \to \forall x\, \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$.

Global な導出可能性条件

Global な導出可能性条件

$$\mathbf{D2^G} \quad T \vdash \forall x \forall y (\mathrm{Fml}(x) \land \mathrm{Fml}(y) \\ \to (\mathrm{Pr}_T(x \dot{\to} y) \to (\mathrm{Pr}_T(x) \to \mathrm{Pr}_T(y)))).$$

$$\mathbf{\Gamma C^G} \quad T \vdash \forall x (\mathsf{True}_\Gamma(x) \to \mathrm{Pr}_T(x)).$$

$$\mathbf{PC^G} \quad T \vdash \forall x (\mathrm{Fml}(x) \to (\mathrm{Pr}_\emptyset(x) \to \mathrm{Pr}_T(x))).$$

注意

Global $\Rightarrow$ Uniform $\Rightarrow$ Local.

これまでに紹介した結果

Hilbert-Bernays $\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

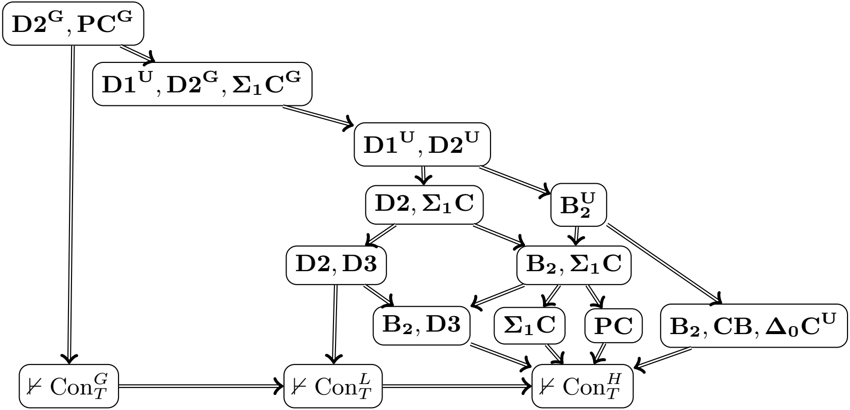
Löb $\mathbf{D2}, \mathbf{D3} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$

Jeroslow $\mathbf{\Sigma_1 C} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

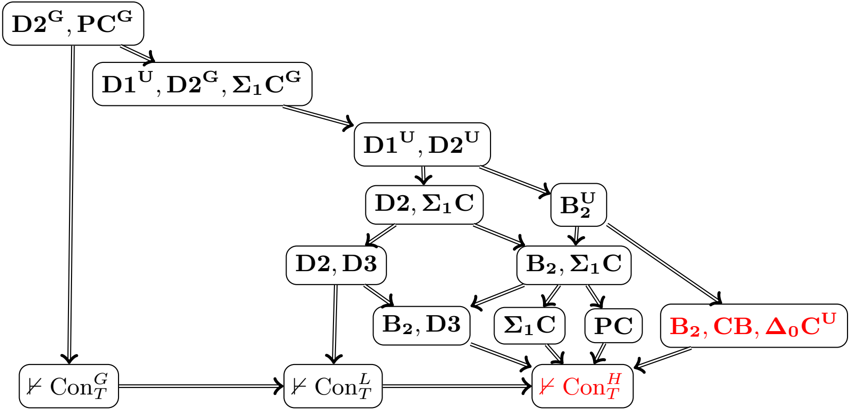
Montagna $\mathbf{D2^G}, \mathbf{PC^G} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$

Buchholz $\mathbf{D1^U}, \mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

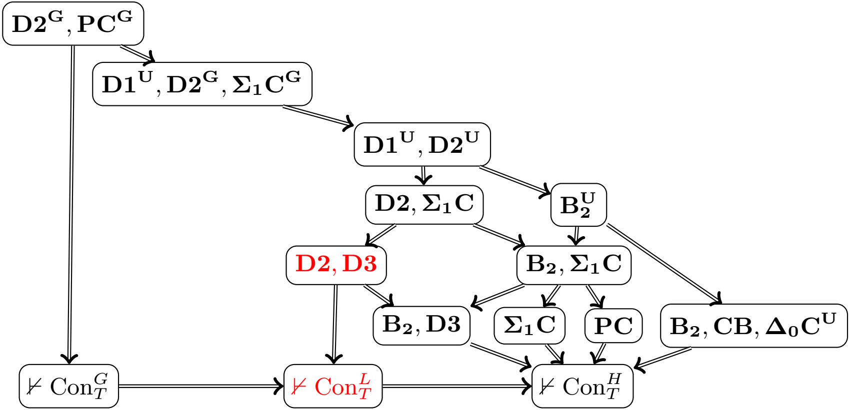
条件の組の間の関係


$\mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{PC}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{G}}, \mathbf{\Sigma_1 C}^{\mathbf{G}}$
$\mathbf{D1}^{\mathbf{U}}, \mathbf{D2}^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B}_2^{\mathbf{U}}$
$\mathbf{D2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C}^{\mathbf{U}}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

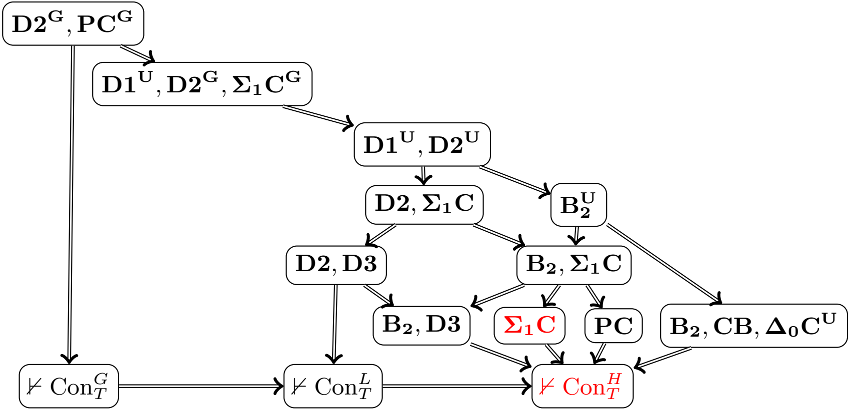
Hilbert and Bernays (1939)



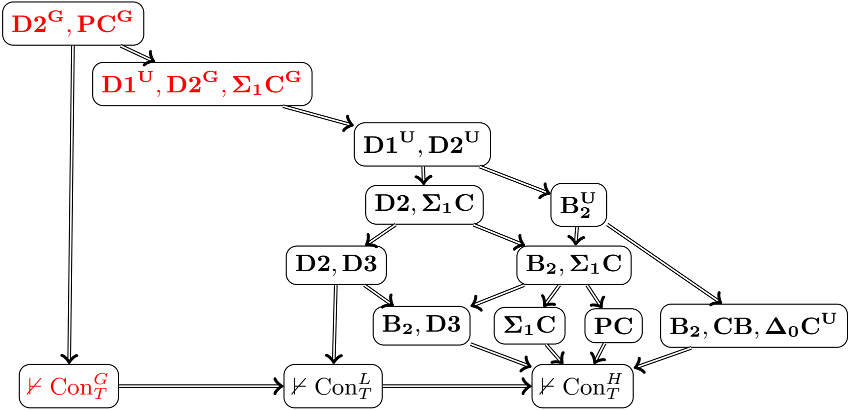
Löb (1955)


$\mathbf{D2^G, PC^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^G, \Sigma_1 C^G}$
$\mathbf{D1^U, D2^U}$
$\mathbf{D2, \Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2^U}$
$\mathbf{D2, D3}$
$\mathbf{B_2, \Sigma_1 C}$
$\mathbf{B_2, D3}$
$\mathbf{\Sigma_1 C}$
$\mathbf{PC}$
$\mathbf{B_2, CB, \Delta_0 C^U}$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^G$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^L$
$\nvdash \mathrm{Con}_T^H$

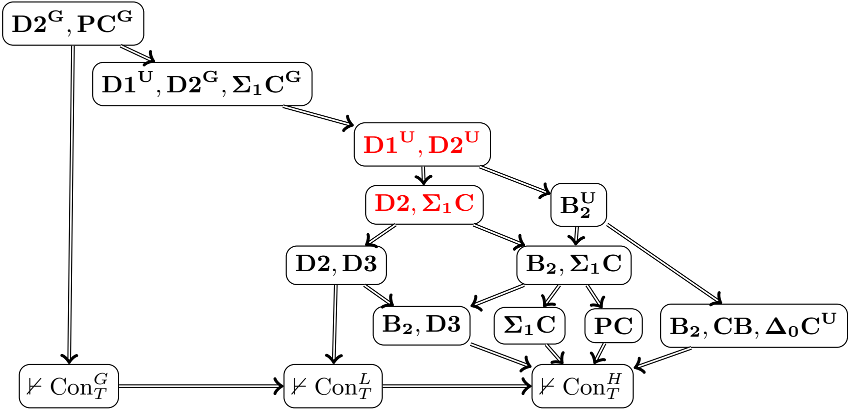
Jeroslow (1973)



Montagna (1979)

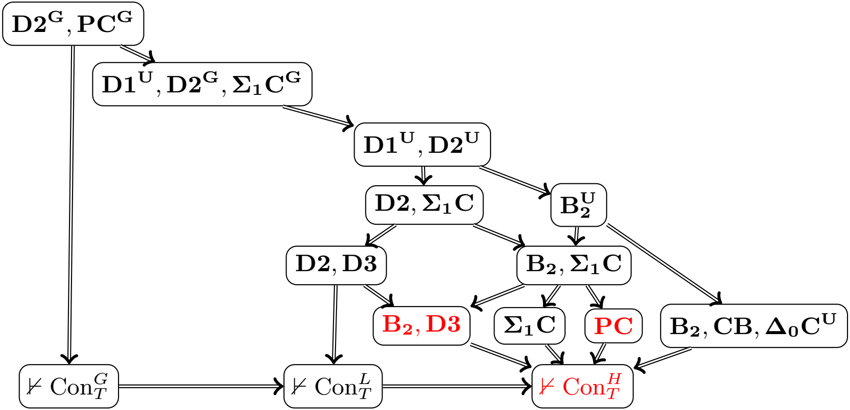


Buchholz (1993)



1. 証明と **Kreisel** の注意
2. 様々な第二不完全性定理
3. 導出可能性条件
4. 研究成果
    1. 新しい十分条件
    2. **Buchholz** の結果の改良
    3. 様々な反例

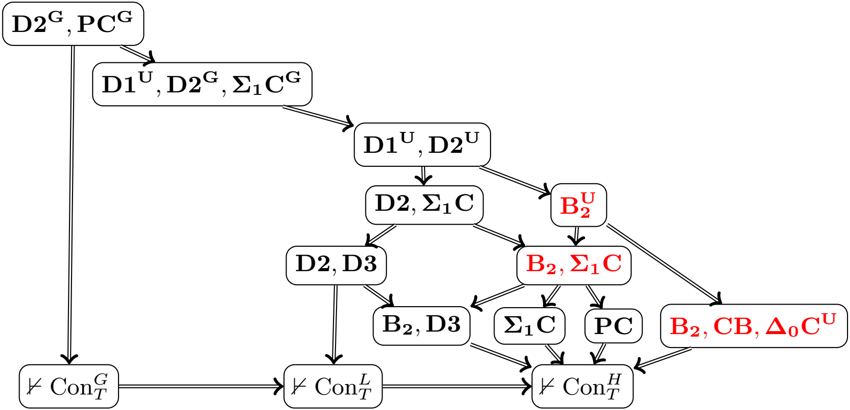
新しい十分条件



定理 (K.)

- $\mathbf{B_2}$ & $\mathbf{D3} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$
- $\mathbf{PC} \Rightarrow T \nvdash \mathrm{Con}_T^H$

Buchholz の結果の改良

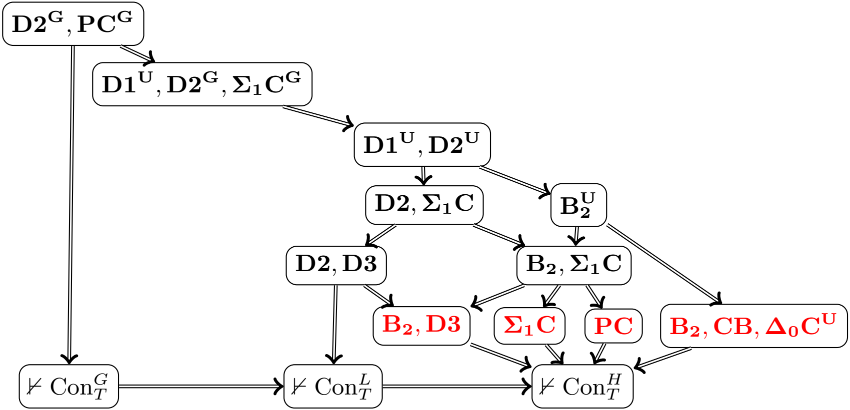


定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$

Buchholz の結果（$\mathbf{D1^U}$ & $\mathbf{D2^U} \Rightarrow \mathbf{\Sigma_1 C^U}$）の拡張.

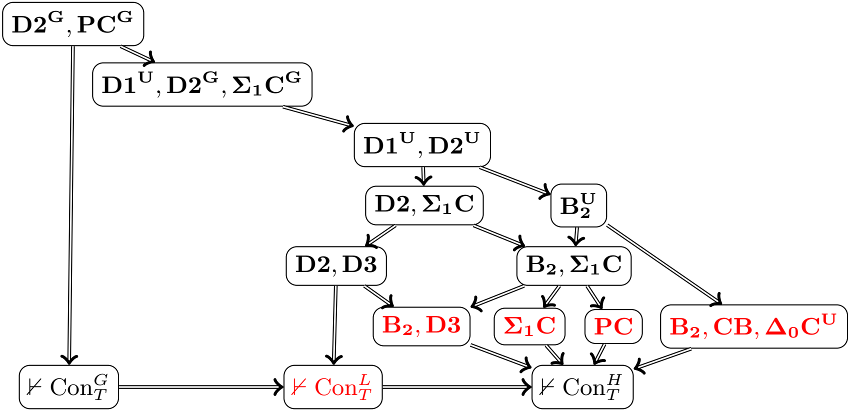
反例 1



定理 (K.)

$\{\mathbf{B_2}, \mathbf{D3}\}$, $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C}^{\mathbf{U}}\}$ のどの二つも比較不可能.

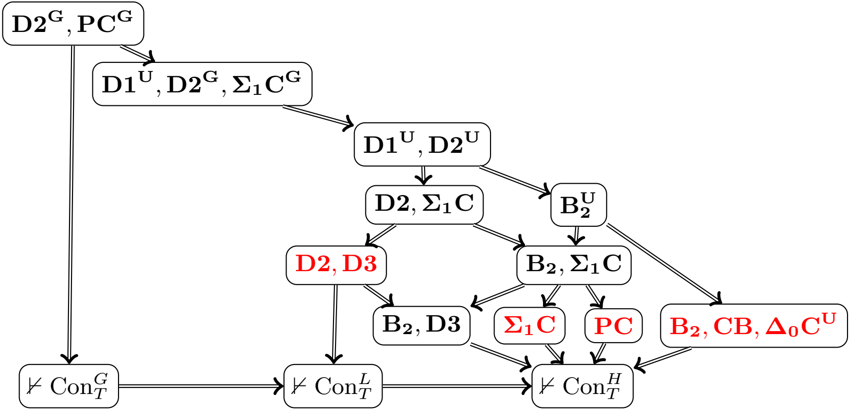
反例 2



定理 (K.)

$\{\mathbf{B_2, D3}\}$, $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2, CB, \Delta_0 C^U}\}$ のどれも $T \nvdash \mathrm{Con}_T^L$ を導かない.

反例 3

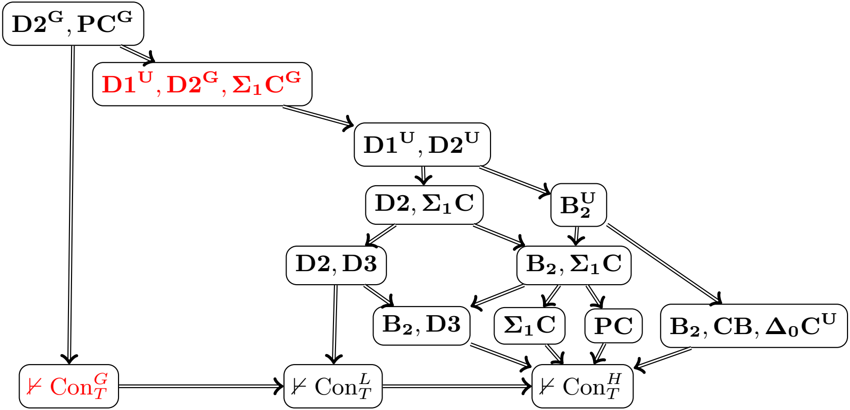


定理 (K.)

$\{\mathbf{D2}, \mathbf{D3}\}$ は $\{\mathbf{\Sigma_1 C}\}$, $\{\mathbf{PC}\}$, $\{\mathbf{B_2}, \mathbf{CB}, \mathbf{\Delta_0 C^U}\}$ のどれも導かない.

Hilbert-Bernays の条件と Löb の条件は比較不可能.

反例 4

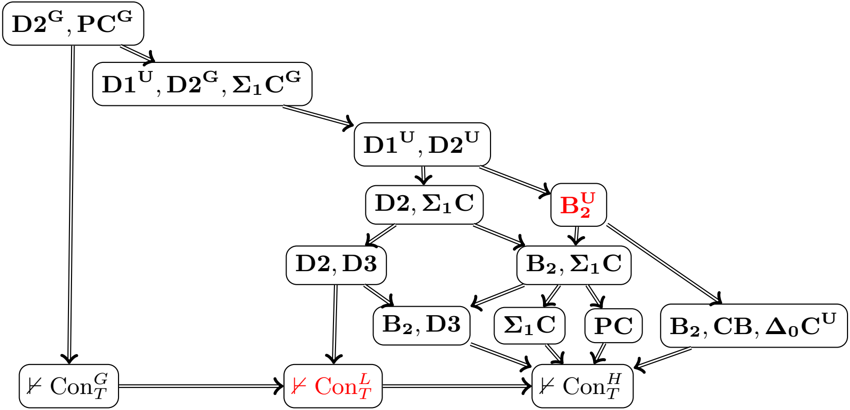


定理 (K.)

$\{\mathbf{D1^U, D2^G, \Sigma_1 C^G}\}$ は $T \nvdash \mathrm{Con}_T^G$ を導かない.

これより，**Hilbert-Bernays** の条件も **Löb** の条件も **Gödel** の元の **G2** の主張を達成できていないことが分かる.

問題



定理 (K.)

$\mathbf{B_2^U} \not\Rightarrow \mathbf{D2}$.

問題

$\mathbf{B_2^U}$ を満たすが $T \vdash \mathrm{Con}_T^L$ となるものはあるか？

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
  …本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- **Gödel** の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
  …**Gödel** 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
  …本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- Gödel の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
  …Gödel 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
  …本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- Gödel の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
  …Gödel 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
…本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- **Gödel** の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
…**Gödel** 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
  …本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- **Gödel** の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
  …**Gödel** 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

最後に

問い

第二不完全性定理とは何か？その正確な主張は？

可能な答え

- Con_T の証明不可能性を主張する複数の定理の総称である
  …本質的でない主張をも含めてしまう可能性がある.
- **Gödel** の作った Con_T の証明不可能性を主張するものである
  …**Gödel** 数化を変えれば証明可能性述語は変わるがそれも許さないのか？

第二不完全性定理として取り扱うべき証明可能性述語の範囲を特定することは容易ではない.

参考文献

- T. Kurahashi, A note on derivability conditions, arXiv:1902.00895
- T. Kurahashi, Rosser provability and the second incompleteness theorem, arXiv:1902.06863
- 倉橋太志, 不完全性定理の数学的発展, 投稿中.
- 菊池誠, 数と論理の物語：不完全性定理について考えるための 10 の定理（ロッサーの定理／超準的な証明可能性述語と ω 無矛盾性）, 数学セミナー, 8 月号 (2019), pp.70-77.