部分保存的な文に関する Guaspari の問題について

発表者: 大川裕矢 (千葉大学融合理工学府)
倉橋太志講師 (木更津工業高等専門学校) との共同研究

数学基礎論若手の会 2019 年 12/6

Γ-保存性

T, T_i, U: 算術 (PA) を含む無矛盾な r.e. 理論.
$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$.

$$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$$

定義

文 φ が T 上 Γ-保存的である.
:⇔ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

Γ-保存性

T, T_i, U: 算術 (PA) を含む無矛盾な r.e. 理論.
$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$.

$$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$$

定義

文 φ が T 上 Γ-保存的である.
:⇔ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

定理 (Kreisel: 1962)

$\neg \mathrm{Con}_T$ は T 上 Π_1-保存的である.

Γ-保存性

T, T_i, U: 算術 (PA) を含む無矛盾な r.e. 理論.
$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$.

$$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$$

定義

文 φ が T 上 Γ-保存的である.
:⇔ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

定理 (Kreisel: 1962)

$\neg\mathrm{Con}_T$ は T 上 Π_1-保存的である.

任意の Π_1 文 π について, $T + \neg\mathrm{Con}_T \vdash \pi$ ならば $T \vdash \pi$.

Γ-保存性

T, T_i, U: 算術 (PA) を含む無矛盾な r.e. 理論.
$\Gamma \in \{\Sigma_n, \Pi_n : n \geq 1\}$.

$$\Gamma^d := \begin{cases} \Pi_n & (\Gamma = \Sigma_n) \\ \Sigma_n & (\Gamma = \Pi_n) \end{cases}$$

定義

文 φ が T 上 Γ-保存的である.
:⇔ 任意の Γ 文 ψ について $T + \varphi \vdash \psi$ ならば $T \vdash \psi$.

定理 (Kreisel: 1962)

$\neg \mathrm{Con}_T$ は T 上 Π_1-保存的である.

任意の Π_1 文 π について, $T + \neg \mathrm{Con}_T \vdash \pi$ ならば $T \vdash \pi$.
π として $\perp$ を考えると, 第二不完全性定理となる.

Guaspari の定理

定義

- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \in \Gamma^d : \varphi$ が T 上 Γ-保存的 $\}$.
- $\mathrm{Th}(T) := \{\varphi : \varphi$ は文で $T \vdash \varphi\}$.

Guaspari の定理

定義

- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \in \Gamma^d : \varphi$ が T 上 Γ-保存的 $\}$.
- $\mathrm{Th}(T) := \{\varphi : \varphi$ は文で $T \vdash \varphi\}$.

$\varphi \in \Gamma^d$ が $T \vdash \varphi$ なら明らかに $\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)$.

Guaspari の定理

定義

- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) := \{\varphi \in \Gamma^d : \varphi$ が T 上 Γ-保存的 $\}$.
- $\mathrm{Th}(T) := \{\varphi : \varphi$ は文で $T \vdash \varphi\}$.

$\varphi \in \Gamma^d$ が $T \vdash \varphi$ なら明らかに $\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T)$.

定理 (Guaspari: 1979)

$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(T) \neq \emptyset$.

Guaspari の定理

ところで，以下が成立する．

$$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \Rightarrow T \nvdash \neg\varphi.$$

Guaspari の定理

ところで，以下が成立する．

$$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \Rightarrow T \nvdash \neg\varphi.$$

Proof.

$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T + \varphi \vdash \bot \Rightarrow T \vdash \bot.$ $\square$

Guaspari の定理

ところで，以下が成立する．

$$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \Rightarrow T \nvdash \neg\varphi.$$

Proof.

$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T + \varphi \vdash \bot \Rightarrow T \vdash \bot.$ □

つまり，$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(T) \neq \emptyset$ から，
次の **Gödel-Rosser** の第一不完全性定理が導かれる．

定理 (Gödel-Rosser: 1936)

次の文 φ が存在する:
$T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$

Guaspari の問

理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が r.e. である $:\Leftrightarrow \{\langle i, \varphi\rangle | T_i \vdash \varphi\}$ が r.e. 集合.

Guaspari の問

理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が r.e. である :⇔ $\{\langle i,\varphi\rangle \mid T_i \vdash \varphi\}$ が r.e. 集合.
Mostowski は Gödel-Rosser の定理を次のように一般化している.

Mostowski (1961)

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ について，次の Π_1 文 φ が存在する:
各 $i \in \omega$ について，$T_i \nvdash \varphi$ かつ $T_i \nvdash \neg\varphi$.

Guaspari の問

理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が r.e. である :⇔ $\{\langle i, \varphi\rangle \mid T_i \vdash \varphi\}$ が r.e. 集合.
Mostowski は Gödel-Rosser の定理を次のように一般化している.

Mostowski (1961)

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ について，次の Π_1 文 φ が存在する:
各 $i \in \omega$ について，$T_i \nvdash \varphi$ かつ $T_i \nvdash \neg\varphi$.

Mostowski の定理に対応して，次の問が考えられる.

問題 (Guapari: 1979)

任意の理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ に対して，
$\bigcap_{i\in\omega} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$?

Guaspari の問

理論の列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が r.e. である :⇔ $\{\langle i,\varphi\rangle \mid T_i \vdash \varphi\}$ が r.e. 集合.
Mostowski は Gödel-Rosser の定理を次のように一般化している.

Mostowski (1961)

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ について，次の Π_1 文 φ が存在する:
各 $i \in \omega$ について， $T_i \nvdash \varphi$ かつ $T_i \nvdash \neg\varphi$.

Mostowski の定理に対応して，次の問が考えられる.

問題 (Guapari: 1979)

任意の理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ に対して，
$\bigcap_{i\in\omega} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$?

つまり,「非自明に複数の理論で同時に Γ-保存的となる Γ^d 文は存在するか?」ということ.

Guaspari の問題は一般には成立しない.

Guaspari の問題は一般には成立しない.

Misercque 及び Bennet により,
Guaspari の問いに対する部分的な反例が見つかっている.

Miserque の分析

定理 (Misercque: 1983)

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が存在し，任意の Γ について，$\bigcap_{i\in\omega}(\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) = \emptyset$ となる．

Misercque の分析

定理 (Misercque: 1983)

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ が存在し，任意の Γ について，$\bigcap_{i\in\omega}(\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\setminus \mathrm{Th}(T_i)) = \emptyset$ となる．

ただし，この例は有限個の理論に対する Guaspari の問題の反例になっているわけではない．

Bennet の分析 1

Bennet は 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行った.

Bennet の分析 1

Bennet は 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行った．

定理 (Bennet: 1986)

理論 T_0, T_1 について，以下は同値．

- $\bigcap_{i \leq 1} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$
- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_0) \setminus \mathrm{Th}(T_1) \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_1) \setminus \mathrm{Th}(T_0) \neq \emptyset$.

Bennet の分析 1

Bennet は 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行った.

定理 (Bennet: 1986)

理論 T_0, T_1 について，以下は同値.

- $\bigcap_{i\leq 1} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$
- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_0) \setminus \mathrm{Th}(T_1) \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_1) \setminus \mathrm{Th}(T_0) \neq \emptyset$.

つまり，2 つの理論に対する Guaspari の問は，
$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ という条件を考えることに帰着される.

Bennet の分析 1

Bennet は 2 つの理論に対する Guaspari の問題について分析を行った．

定理 (Bennet: 1986)

理論 T_0, T_1 について，以下は同値．

- $\bigcap_{i \leq 1} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$
- $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_0) \setminus \mathrm{Th}(T_1) \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{Cons}(\Gamma, T_1) \setminus \mathrm{Th}(T_0) \neq \emptyset$.

つまり，2 つの理論に対する Guaspari の問は，
$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ という条件を考えることに帰着される．

- 任意の T, U で $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ なら，Guaspari の問は成立．
- ある T, U で $\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) = \emptyset$ が見つかれば，Guaspari の問は不成立．

Bennet の分析 2

$\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) := \mathrm{Th}(T) \cap \Gamma$ とする.
条件「$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$」は次のような十分条件を持つ.

Bennet の分析 2

$\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) := \mathrm{Th}(T) \cap \Gamma$ とする．
条件「$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$」は次のような十分条件を持つ．

定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) + U$ は無矛盾．
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

Bennet の分析 2

$\mathrm{Th}_\Gamma(T) := \mathrm{Th}(T) \cap \Gamma$ とする.
条件「$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$」は次のような十分条件を持つ.

定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_\Gamma(T) + U$ は無矛盾.
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

Γ が Σ_n なら，これらは同値.

Bennet の分析 2

$\mathrm{Th}_\Gamma(T) := \mathrm{Th}(T) \cap \Gamma$ とする．
条件「$\mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$」は次のような十分条件を持つ．

定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_\Gamma(T) + U$ は無矛盾．
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

Γ が Σ_n なら，これらは同値．

定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Pi_n}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は無矛盾．
$\Leftrightarrow \mathrm{Cons}(\Sigma_n, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

Guaspari の問の反例 (Σ_n の場合)

補題

次を満たす理論 T, U が存在する.

- $\mathrm{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \mathrm{Th}(U)$
- $\mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は矛盾する.

Guaspari の問の反例 (Σ_n の場合)

補題

次を満たす理論 T, U が存在する.

- $\mathrm{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \mathrm{Th}(U)$
- $\mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は矛盾する.

Proof.

$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Pi_n, \mathsf{PA}) \setminus \mathrm{Th}(\mathsf{PA})$ 固定する.

Guaspari の問の反例 (Σ_n の場合)

補題

次を満たす理論 T, U が存在する.

- $\mathrm{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \mathrm{Th}(U)$
- $\mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は矛盾する.

Proof.

$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Pi_n, \mathsf{PA}) \setminus \mathrm{Th}(\mathsf{PA})$ 固定する.

- $T := \mathsf{PA} + \varphi$
- $U := \mathsf{PA} + \neg\varphi$

とすればよい. $\square$

Guaspari の問の反例 (Σ_n の場合)

補題

次を満たす理論 T, U が存在する.

- $\mathrm{Th}_{\Pi_n}(T) \subseteq \mathrm{Th}(U)$
- $\mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T) + U$ は矛盾する.

Proof.

$\varphi \in \mathrm{Cons}(\Pi_n, \mathsf{PA}) \setminus \mathrm{Th}(\mathsf{PA})$ 固定する.

- $T := \mathsf{PA} + \varphi$
- $U := \mathsf{PA} + \neg\varphi$

とすればよい. □

残る Guaspari の問題は有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の状況のみ.

Bennet の問

問題 (Bennet: 1986)

次を満たす T, U は存在するか?

$\mathrm{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \mathrm{Th}(U) = \emptyset$

今回，Guaspari の問いに関連する次の 2 つの結果が得られた．

- Bennet の結果を 2 つ以上の理論に一般化．
- 有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の場合の Guaspari の問の解決．

得られた結果 (一般化)

Bennet の 2 つの理論に対する分析を，2 つ以上の理論に拡張する．

定理

任意の自然数 $k \geq 1$ と $T_0, \ldots, T_k$ について，以下は同値．

(i) $\bigcap_{i \leq k} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

(ii) 任意の $i \leq k$ について，$\left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \leq k}} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_j)\right) \setminus \mathrm{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

得られた結果 (一般化)

Bennet の 2 つの理論に対する分析を，2 つ以上の理論に拡張する．

定理

任意の自然数 $k \geq 1$ と $T_0, \ldots, T_k$ について，以下は同値．

(i) $\bigcap_{i \leq k} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

(ii) 任意の $i \leq k$ について，$\left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \leq k}} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_j)\right) \setminus \mathrm{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

よって，複数の理論に対して同時に Γ-保存的となる文の存在は，$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ を考えることに帰着される．

得られた結果 (一般化)

Bennet の 2 つの理論に対する分析を，2 つ以上の理論に拡張する．

定理

任意の自然数 $k \geq 1$ と $T_0, \ldots, T_k$ について，以下は同値．

(i) $\bigcap_{i \leq k} (\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.

(ii) 任意の $i \leq k$ について，$\left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j \leq k}} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_j)\right) \setminus \mathrm{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

よって，複数の理論に対して同時に Γ-保存的となる文の存在は，
$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ を考えることに帰着される．
$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ の十分条件は… ?

得られた結果 (一般化)

(再掲) 定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) + U$ は無矛盾.
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

得られた結果 (一般化)

(再掲) 定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) + U$ は無矛盾.
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

$\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\bigcup_{i \leq k} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U$ は無矛盾,
が十分条件として予想できる.

得られた結果 (一般化)

(再掲) 定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) + U$ は無矛盾.
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

$\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\bigcup_{i \leq k} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U$ は無矛盾,
が十分条件として予想できる. が, それでは一般に逆を示せない.

得られた結果 (一般化)

(再掲) 定理 (Bennet: 1986)

$\mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\mathrm{Th}_{\Gamma}(T) + U$ は無矛盾.
$\Rightarrow \mathrm{Cons}(\Gamma, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

$\bigcap_{i<k} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(U)$ または $\bigcup_{i<k} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U$ は無矛盾,
が十分条件として予想できる. が, それでは一般に逆を示せない.

定理

$\{T_i\}_{i\in\omega}$: 理論の r.e. 列とする.

$$\bigcap_{i\in\omega\setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}\Big(\bigcup_{i\in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U\Big)$$

となる r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する.
$\Rightarrow \left(\bigcap_{i\in\omega} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

得られた結果 (一般化)

$I_k := \{0, \ldots, k\}$ とする.
$\Gamma = \Sigma_n$ の場合，有限列に対しては同値になる.

得られた結果 (一般化)

$I_k := \{0, \ldots, k\}$ とする．
$\Gamma = \Sigma_n$ の場合，有限列に対しては同値になる．

定理

$T_0, \ldots, T_k$, U: 理論とする．

$$\bigcap_{i \in I_k \setminus X} \mathrm{Th}_{\Pi_n}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}\Big(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Sigma_n}(T_i) + U\Big)$$

なる集合 $X \subseteq I_k$ が存在する．
$\Leftrightarrow \left(\bigcap_{i \in I_k} \mathrm{Cons}(\Sigma_n, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

問

無限列に対する結果が一部得られていることから，
次の問が考えられる．

問

無限列に対する結果が一部得られていることから，
次の問が考えられる．

問題

理論の r.e. 列 $\{T_i\}_{i\in\omega}$ について，以下は同値か?

- $\bigcap_{i\in\omega}(\mathrm{Cons}(\Gamma, T_i) \setminus \mathrm{Th}(T_i)) \neq \emptyset$.
- 任意の $i \in \omega$ について，$\left(\bigcap_{\substack{j\neq i\\ j\in\omega}} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_j)\right) \setminus \mathrm{Th}(T_i) \neq \emptyset$.

問

次の条件を考える.

問

次の条件を考える.

(I) 次の r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(II) 次の集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(III) $(\bigcap_{i \in \omega} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

(IV) 任意の $k \in \omega$ について, $\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

問

次の条件を考える.

(I) 次の r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(II) 次の集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(III) $(\bigcap_{i \in \omega} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

(IV) 任意の $k \in \omega$ について, $\left(\bigcap_{i \le k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{(II)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(I)} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{成立}"] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(IV)} \\
 & \text{(III)} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

問

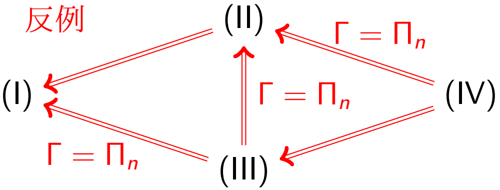
次の条件を考える.

(I) 次の r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(II) 次の集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(III) $(\bigcap_{i \in \omega} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

(IV) 任意の $k \in \omega$ について, $\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$



問

次の条件を考える.

(I) 次の r.e. 集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(II) 次の集合 $X \subseteq \omega$ が存在する:
$\bigcap_{i \in \omega \setminus X} \mathrm{Th}_{\Gamma^d}(T_i) \not\subseteq \mathrm{Th}(\bigcup_{i \in X} \mathrm{Th}_{\Gamma}(T_i) + U)$

(III) $(\bigcap_{i \in \omega} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

(IV) 任意の $k \in \omega$ について, $\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Gamma, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$

$$
\begin{tikzcd}
\text{問} & \text{(II)} \arrow[dd, Rightarrow] & \\
\text{(I)} & & \text{(IV)} \arrow[ul, Rightarrow, "\Gamma = \Sigma_n"'] \\
& \text{(III)} \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\Gamma = \Sigma_n"'] \arrow[ul, Rightarrow, "\Gamma = \Sigma_n"] &
\end{tikzcd}
$$

得られた結果 (Bennet の問)

Shavrukov との議論により，
有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の状況では Guaspari の問は成立することが判明した．

得られた結果 (Bennet の問)

Shavrukov との議論により,
有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の状況では Guaspari の問は成立することが判明した.

任意有限個の理論に対して Guaspari の問は
$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Pi_n, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ の条件に帰着できた.

得られた結果 (Bennet の問)

Shavrukov との議論により，
有限列に対する $\Gamma = \Pi_n$ の状況では Guaspari の問は成立することが判明した．

任意有限個の理論に対して Guaspari の問は
$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Pi_n, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ の条件に帰着できた．

定理

任意の理論 $T_0, \ldots, T_k, U$ に対して，
$\left(\bigcap_{i \leq k} \mathrm{Cons}(\Pi_n, T_i)\right) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$.

問

$\mathrm{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ の証明は背理法を用いる.

問

$\mathrm{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ の証明は背理法を用いる.
つまり，構成的な証明ではない.

問題

$\mathrm{Cons}(\Pi_n, T) \setminus \mathrm{Th}(U) \neq \emptyset$ に構成的な証明を与えられるか?

参考文献

[1] C. Bennet, On some orderings of extensions of arithmetic, *Thesis, Dept. of Philosophy, Univ. of Göteborg* (1986).
[2] D. Guaspari, Partially conservative extentions of arithmetic, *Trans. Amer. Math. Soc*, vol.254, pp.47-68 (1979).
[3] G. Kreisel. On weak completeness of intuitionistic predicate logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 27: 139-158, (1962).
[4] T. Kurahashi, Y. Okawa. On Guaspari's problem about partially conservative sentences. submitted.
[5] D. Misercque, Answer to a problem by D. Guaspari, *in : Open days in Model Theory and Set Theory(eds. W Guzicki et al)*, Poland, pp.181-183 (1983).