Silver-Solovay の問題と Prikry 強制

大塚 智哉

筑波大学 数理物質科学研究科 数学専攻 M1

2019 年 12 月 6 日

目次

1. 概要と準備
2. Silver-Solovay の問題
3. Prikry 強制
4. 無矛盾性の強さ
5. おまけ
6. 参考文献

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

概要

- 強制法において基数の保存は重要な議論である.
- よく知られた強制法の一般論として, 可算鎖条件を充たす強制法は全ての共終数を変えない, 特に全ての基数を保存する.
- 強制法の黎明期に Silver と Solovay によって次のような問題が提示された.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか?

- ある巨大基数の存在を仮定することで Prikry によって肯定的に解かれている.
- 本講演ではこの問題の代表的な解である Prikry 強制について紹介する.

基本事項 I

基本的な用語について述べておく.

定義

- 集合 α が順序数であるとは, α が推移的 $(\Leftrightarrow \forall x \in \alpha(x \subseteq \alpha))$ で $\langle \alpha, \in \rangle$ が整列順序をなすことをいう.
- $\alpha = \beta + 1 (= \beta \cup \{\beta\})$ の形の順序数を後続順序数, そうでない順序数で $\emptyset$ でないものを極限順序数という.
- $\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta$.
- 順序数全体のクラスを ON で表す.

例

- $0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \cdots, n+1 = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \cdots, n\}, \cdots$ は後続順序数.
- $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ は極限順序数.

基本事項 II

定義

- 集合 x との間に全単射が存在するような最小の順序数を $|x|$ で表し, $|\alpha| = \alpha$ なる順序数 α を基数という.
- $\mathrm{cf}(\kappa) := \min\{|x| : x$ はκの非有界な部分集合 $\}$ を κ の共終数といい, $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ なる無限基数を正則基数という.

定義

- 累積階層 V_α を次のように再帰的に定める:
  - $V_0 := \emptyset$
  - $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$
  - $V_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ (α は極限順序数).
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$ が次を充たすとき α 上のフィルターであるという:
  - $0 \notin \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{F}$
  - $\forall X, Y \in \mathcal{F}(X \cap Y \in \mathcal{F})$
  - $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\alpha)(X \subseteq Y \wedge X \in \mathcal{F} \to Y \in \mathcal{F})$.

強制法 I

定義

- $\leq_{\mathbb{P}}$ が $\mathbb{P}$ 上の推移的で反射的な二項関係であり $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ を最大元に持つとき, $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \rangle$ を強制概念という.
- $D \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$-稠密であるとは, $\forall p \in \mathbb{P}\, \exists q \in D(q \leq_{\mathbb{P}} p)$ を充たすことをいう.
- $G \subseteq \mathbb{P}$ がフィルターであるとは次を充たすことをいう:
  - $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G$
  - $\forall p, q \in G\, \exists r \in G(r \leq_{\mathbb{P}} p, q)$
  - $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq_{\mathbb{P}} q \wedge p \in G \rightarrow q \in G)$.

  特にフィルター G が次を充たすとき $(V, \mathbb{P})$-生成的という:
  - 任意の稠密な $D \in V$ に対して $D \cap G \neq \emptyset$.

$(V, \mathbb{P})$-生成的な G は一般には集合論の宇宙 V の元ではない. この G を元に持つような ZFC の最小モデル $V[G]$ を得る手法が強制法である.

強制法 II

定理

強制概念 $\mathbb{P}$ と $(V,\mathbb{P})$-生成的な G に対して次を充たすような $V[G]$ が存在する:

- $V \subseteq V[G]$.
- $ON^{V[G]} = ON^{V}$.
- $G \in V[G]$.
- $V[G] \models$ZFC.

定義

- $x \in V^{\mathbb{P}}$:$\Leftrightarrow$ x は $\forall \langle y, p\rangle \in x (y \in V^{\mathbb{P}} \wedge p \in \mathbb{P})$ なる二項関係.
- $x \in V^{\mathbb{P}}$ に対して $x^G := \{y^G : \exists p \in G(\langle y, p\rangle \in x)\}$.

強制法 III

注意

$V[G] = \{x^G : x \in V^{\mathbb{P}}\}$ と書ける.

強制言語 (集合論の言語 $(= \{\in\})$ に $V^{\mathbb{P}}$ の要素を定数記号として加えたもの) の論理式 φ と $p \in \mathbb{P}$ に対して $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ という関係を定義できる. これは $V[G]$ での真偽値を特徴付ける.

定理

任意の $x_0, \cdots, x_n \in V^{\mathbb{P}}$ と集合論の論理式 $\varphi(v_0, \cdots, v_n)$ に対して次が成り立つ:

$$\exists p \in G(p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(x_0, \cdots, x_n)) \Leftrightarrow V[G] \models \varphi(x_0^G, \cdots, x_n^G)$$

基数の破壊

一般に, 強制法で基数であることは保存されない. すなわち, V の基数が $V[G]$ では基数でない, という状況が起こり得る.
このような例は容易に作れる.

例

$\mathbb{P} :={}^{<\omega}\aleph_{2019}$ として $\leq_{\mathbb{P}}:=\supseteq$ とすると, 任意の $(V,\mathbb{P})$-生成的な G に対して次が成り立つ:

$$V[G] \models \bigcup G \text{ は } \omega \text{ から } \aleph_{2019}^V \text{ への全射.}$$

よって $V[G]$ では $|\aleph_{2019}^V| = \omega$ であり V での $\aleph_{2019}$ が $V[G]$ では基数でないことが分かる.

基数の破壊

一般に，強制法で基数であることは保存されない．すなわち，V の基数が $V[G]$ では基数でない，という状況が起こり得る．
このような例は容易に作れる．

例

$\mathbb{P} :=^{<\omega} \aleph_{2019}$ として $\leq_{\mathbb{P}} := \supseteq$ とすると，任意の $(V, \mathbb{P})$-生成的な G に対して次が成り立つ：

$$V[G] \models \bigcup G \text{ は } \omega \text{ から } \aleph_{2019}^{V} \text{ への全射.}$$

よって $V[G]$ では $|\aleph_{2019}^{V}| = \omega$ であり V での $\aleph_{2019}$ が $V[G]$ では基数でないことが分かる．

証明

まず $V[G]$ で議論すると $\bigcup G$ は関数である．実際, G はフィルターであるから $f, g \in G$ に対して $f \cup g$ もまた関数である．

次に V で議論すると, 各 $n \in \omega$ と $\alpha < \aleph_{2019}$ に対して,

- $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$,
- $E_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(f)\}$,

は $\mathbb{P}$ で稠密である．したがって再び $V[G]$ で議論すると, 任意の $n \in \omega$ に対して $f \in D_n \cap G$ が存在して,

$$n \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$$

が分かる．同様に各 $\alpha < \aleph_{2019}^V$ に対して $\alpha \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$ も分かるので, $\bigcup G$ は ω から $\aleph_{2019}^V$ への全射である．よって $V[G]$ で $\aleph_{2019}^V$ は基数でない． □

証明

まず $V[G]$ で議論すると $\bigcup G$ は関数である．実際，G はフィルターであるから $f, g \in G$ に対して $f \cup g$ もまた関数である．
次に V で議論すると，各 $n \in \omega$ と $\alpha < \aleph_{2019}$ に対して，

- $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$,
- $E_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(f)\}$,

は $\mathbb{P}$ で稠密である．したがって再び $V[G]$ で議論すると，任意の $n \in \omega$ に対して $f \in D_n \cap G$ が存在して，

$$n \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$$

が分かる．同様に各 $\alpha < \aleph_{2019}^V$ に対して $\alpha \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$ も分かるので，$\bigcup G$ は ω から $\aleph_{2019}^V$ への全射である．よって $V[G]$ で $\aleph_{2019}^V$ は基数でない． □

証明

まず $V[G]$ で議論すると $\bigcup G$ は関数である．実際，G はフィルターであるから $f, g \in G$ に対して $f \cup g$ もまた関数である．
次に V で議論すると，各 $n \in \omega$ と $\alpha < \aleph_{2019}$ に対して，

- $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$,
- $E_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(f)\}$,

は $\mathbb{P}$ で稠密である．したがって再び $V[G]$ で議論すると，任意の $n \in \omega$ に対して $f \in D_n \cap G$ が存在して，

$$n \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$$

が分かる．同様に各 $\alpha < \aleph_{2019}^V$ に対して $\alpha \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$ も分かるので，$\bigcup G$ は ω から $\aleph_{2019}^V$ への全射である．よって $V[G]$ で $\aleph_{2019}^V$ は基数でない． □

証明

まず $V[G]$ で議論すると $\bigcup G$ は関数である．実際，G はフィルターであるから $f, g \in G$ に対して $f \cup g$ もまた関数である．
次に V で議論すると，各 $n \in \omega$ と $\alpha < \aleph_{2019}$ に対して，

- $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$,
- $E_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(f)\}$,

は $\mathbb{P}$ で稠密である．したがって再び $V[G]$ で議論すると，任意の $n \in \omega$ に対して $f \in D_n \cap G$ が存在して，

$$n \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$$

が分かる．同様に各 $\alpha < \aleph_{2019}^V$ に対して $\alpha \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$ も分かるので，$\bigcup G$ は ω から $\aleph_{2019}^V$ への全射である．よって $V[G]$ で $\aleph_{2019}^V$ は基数でない．$\square$

証明

まず $V[G]$ で議論すると $\bigcup G$ は関数である．実際，G はフィルターであるから $f, g \in G$ に対して $f \cup g$ もまた関数である．
次に V で議論すると，各 $n \in \omega$ と $\alpha < \aleph_{2019}$ に対して，

- $D_n = \{f \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f)\}$,
- $E_\alpha = \{f \in \mathbb{P} : \alpha \in \mathrm{ran}(f)\}$,

は $\mathbb{P}$ で稠密である．したがって再び $V[G]$ で議論すると，任意の $n \in \omega$ に対して $f \in D_n \cap G$ が存在して，

$$n \in \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\bigcup G)$$

が分かる．同様に各 $\alpha < \aleph_{2019}^V$ に対して $\alpha \in \mathrm{ran}(\bigcup G)$ も分かるので，$\bigcup G$ は ω から $\aleph_{2019}^V$ への全射である．よって $V[G]$ で $\aleph_{2019}^V$ は基数でない． □

基数の保存

どのような強制概念なら基数を保存するだろうか.

- $\neg\exists r \in \mathbb{P}(r \leq_{\mathbb{P}} p, q)$ のとき $p \perp q$ と書く.
- $A \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖であるとは, $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$ なることをいう.
- $\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のとき, $\mathbb{P}$ は κ-鎖条件を充たすという. 特に $\kappa = \omega_1$ のときは可算鎖条件を充たすという.

定理

$\mathbb{P}$ が κ-鎖条件を充たすとき κ 以上の共終数を保存する. すなわち, $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa$ のとき $\mathrm{cf}^V(\alpha) = \mathrm{cf}^{V[G]}(\alpha)$. 特に κ が正則基数のとき $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保存する.

$\rightsquigarrow$ 可算鎖条件を充たす強制概念は全ての共終数を, したがって特に全ての基数を保存する.

基数の保存

どのような強制概念なら基数を保存するだろうか.

- $\neg\exists r \in \mathbb{P}(r \leq_{\mathbb{P}} p, q)$ のとき $p \perp q$ と書く.
- $A \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖であるとは, $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$ なることをいう.
- $\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のとき, $\mathbb{P}$ は κ-鎖条件を充たすという. 特に $\kappa = \omega_1$ のときは可算鎖条件を充たすという.

定理

$\mathbb{P}$ が κ-鎖条件を充たすとき κ 以上の共終数を保存する. すなわち, $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa$ のとき $\mathrm{cf}^V(\alpha) = \mathrm{cf}^{V[G]}(\alpha)$. 特に κ が正則基数のとき $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保存する.

$\rightsquigarrow$ 可算鎖条件を充たす強制概念は全ての共終数を, したがって特に全ての基数を保存する.

基数の保存

どのような強制概念なら基数を保存するだろうか.

- $\neg\exists r \in \mathbb{P}(r \leq_{\mathbb{P}} p, q)$ のとき $p \perp q$ と書く.
- $A \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖であるとは, $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$ なることをいう.
- $\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のとき, $\mathbb{P}$ は κ-鎖条件を充たすという. 特に $\kappa = \omega_1$ のときは可算鎖条件を充たすという.

定理

$\mathbb{P}$ が κ-鎖条件を充たすとき κ 以上の共終数を保存する. すなわち, $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa$ のとき $\mathrm{cf}^V(\alpha) = \mathrm{cf}^{V[G]}(\alpha)$. 特に κ が正則基数のとき $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保存する.

$\rightsquigarrow$ 可算鎖条件を充たす強制概念は全ての共終数を, したがって特に全ての基数を保存する.

基数の保存

どのような強制概念なら基数を保存するだろうか.

- $\neg\exists r \in \mathbb{P}(r \leq_{\mathbb{P}} p, q)$ のとき $p \perp q$ と書く.
- $A \subseteq \mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ の反鎖であるとは, $\forall p, q \in A(p \neq q \to p \perp q)$ なることをいう.
- $\mathbb{P}$ の任意の反鎖の濃度が κ 未満のとき, $\mathbb{P}$ は κ-鎖条件を充たすという. 特に $\kappa = \omega_1$ のときは可算鎖条件を充たすという.

定理

$\mathbb{P}$ が κ-鎖条件を充たすとき κ 以上の共終数を保存する. すなわち, $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \kappa$ のとき $\mathrm{cf}^V(\alpha) = \mathrm{cf}^{V[G]}(\alpha)$. 特に κ が正則基数のとき $\mathbb{P}$ は κ 以上の基数を保存する.

$\rightsquigarrow$ 可算鎖条件を充たす強制概念は全ての共終数を, したがって特に全ての基数を保存する.

Silver-Solovay の問題

共終数を変える強制概念についてはどうだろうか.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

すぐ分かることとして, このような強制概念の存在には ZFC より無矛盾性の意味で真に強い仮定を要する.
実際, 強制法によってある正則基数の共終数が変わるが全ての基数が保存される場合, その正則基数は後続基数では有り得ない. したがって, 弱到達不能基数 [1] でなければならないことが分かる.

解 (Prikry)

ある巨大基数の存在の下では存在する.

[1] 正則な極限基数を弱到達不能基数という. 弱到達不能基数の存在は ZFC よりも無矛盾性の意味で真に強い仮定である.

Silver-Solovay の問題

共終数を変える強制概念についてはどうだろうか.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

すぐ分かることとして，このような強制概念の存在には ZFC より無矛盾性の意味で真に強い仮定を要する.
実際，強制法によってある正則基数の共終数が変わるが全ての基数が保存される場合，その正則基数は後続基数では有り得ない．したがって，弱到達不能基数[1] でなければならないことが分かる.

解 (Prikry)

ある巨大基数の存在の下では存在する.

[1] 正則な極限基数を弱到達不能基数という．弱到達不能基数の存在は ZFC よりも無矛盾性の意味で真に強い仮定である.

Silver-Solovay の問題

共終数を変える強制概念についてはどうだろうか.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

すぐ分かることとして，このような強制概念の存在には ZFC より無矛盾性の意味で真に強い仮定を要する.

実際，強制法によってある正則基数の共終数が変わるが全ての基数が保存される場合，その正則基数は後続基数では有り得ない．したがって，弱到達不能基数[1] でなければならないことが分かる.

解 (Prikry)

ある巨大基数の存在の下では存在する.

[1]正則な極限基数を弱到達不能基数という．弱到達不能基数の存在は ZFC よりも無矛盾性の意味で真に強い仮定である.

Silver-Solovay の問題

共終数を変える強制概念についてはどうだろうか.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

すぐ分かることとして，このような強制概念の存在には ZFC より無矛盾性の意味で真に強い仮定を要する.
実際，強制法によってある正則基数の共終数が変わるが全ての基数が保存される場合，その正則基数は後続基数では有り得ない．したがって，弱到達不能基数[1] でなければならないことが分かる.

解 (Prikry)

ある巨大基数の存在の下では存在する.

[1] 正則な極限基数を弱到達不能基数という．弱到達不能基数の存在は ZFC よりも無矛盾性の意味で真に強い仮定である.

Silver-Solovay の問題

共終数を変える強制概念についてはどうだろうか.

問題 (Silver-Solovay)

共終数を変える強制法で基数を保存するものは存在するか？

すぐ分かることとして，このような強制概念の存在には ZFC より無矛盾性の意味で真に強い仮定を要する.
実際，強制法によってある正則基数の共終数が変わるが全ての基数が保存される場合，その正則基数は後続基数では有り得ない．したがって，弱到達不能基数[1] でなければならないことが分かる.

解 (Prikry)

ある巨大基数の存在の下では存在する.

[1] 正則な極限基数を弱到達不能基数という．弱到達不能基数の存在は ZFC よりも無矛盾性の意味で真に強い仮定である.

可測基数

Silver-Solovay の問題に対する解の一つが Prikry 強制である.
強制概念を定義する前に必要となる巨大基数の定義を与える.

- ある $\alpha \in \kappa$ に対して $U = \{X \subseteq \kappa : \alpha \in X\}$ なる κ 上の超フィルター U を単項超フィルターという.
- $\forall \gamma < \kappa \forall \{X_\alpha : \alpha < \gamma\}(\bigcap\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \in U)$ なるとき, U は κ-完備であるという.

定義

非可算基数 κ が可測基数であるとは, κ 上に κ-完備非単項超フィルターが存在することをいう.

可測基数

Silver-Solovay の問題に対する解の一つが Prikry 強制である.
強制概念を定義する前に必要となる巨大基数の定義を与える.

- ある $\alpha \in \kappa$ に対して $U = \{X \subseteq \kappa : \alpha \in X\}$ なる κ 上の超フィルター U を単項超フィルターという.
- $\forall \gamma < \kappa \forall \{X_\alpha : \alpha < \gamma\}(\bigcap \{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \in U)$ なるとき, U は κ-完備であるという.

定義

非可算基数 κ が可測基数であるとは, κ 上に κ-完備非単項超フィルターが存在することをいう.

可測基数

Silver-Solovay の問題に対する解の一つが Prikry 強制である.
強制概念を定義する前に必要となる巨大基数の定義を与える.

- ある $\alpha \in \kappa$ に対して $U = \{X \subseteq \kappa : \alpha \in X\}$ なる κ 上の超フィルター U を単項超フィルターという.
- $\forall\gamma < \kappa \forall\{X_\alpha : \alpha < \gamma\}(\bigcap\{X_\alpha : \alpha < \gamma\} \in U)$ なるとき, U は κ-完備であるという.

定義

非可算基数 κ が可測基数であるとは, κ 上に κ-完備非単項超フィルターが存在することをいう.

正規性

注意

- 可測基数は強極限的[2]な正則基数である.
- 特に可測基数の存在は ZFC よりも真に強い仮定である.

- $\forall \langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle (\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : \forall \alpha < \beta (\beta \in X_\alpha)\} \in U)$ なるとき U は正規であるという.

注意

可測基数 κ 上の κ-完備非単項超フィルターは正規化できる.

以下, κ を可測基数, U を κ 上の正規非単項超フィルターとする.

[2] κ が $\forall \lambda < \kappa (2^\lambda < \kappa)$ を充たすとき強極限的という.

正規性

注意

- 可測基数は強極限的[2]な正則基数である.
- 特に可測基数の存在は ZFC よりも真に強い仮定である.

- $\forall\langle X_\alpha : \alpha < \kappa\rangle(\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : \forall\alpha < \beta(\beta \in X_\alpha)\} \in U)$ なるとき U は正規であるという.

注意

可測基数 κ 上の κ-完備非単項超フィルターは正規化できる.

以下, κ を可測基数, U を κ 上の正規非単項超フィルターとする.

[2] κ が $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa)$ を充たすとき強極限的という.

正規性

注意

- 可測基数は強極限的[2]な正則基数である.
- 特に可測基数の存在は ZFC よりも真に強い仮定である.

- $\forall\langle X_\alpha : \alpha < \kappa\rangle(\Delta_{\alpha<\kappa}X_\alpha = \{\beta < \kappa : \forall\alpha < \beta(\beta \in X_\alpha)\} \in U)$ なるとき U は正規であるという.

注意

可測基数 κ 上の κ-完備非単項超フィルターは正規化できる.

以下, κ を可測基数, U を κ 上の正規非単項超フィルターとする.

[2] κ が $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa)$ を充たすとき強極限的という.

正規性

注意

- 可測基数は強極限的[2]な正則基数である.
- 特に可測基数の存在は ZFC よりも真に強い仮定である.

- $\forall \langle X_\alpha : \alpha < \kappa \rangle (\Delta_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\beta < \kappa : \forall \alpha < \beta (\beta \in X_\alpha)\} \in U)$ なるとき U は正規であるという.

注意

可測基数 κ 上の κ-完備非単項超フィルターは正規化できる.

以下, κ を可測基数, U を κ 上の正規非単項超フィルターとする.

[2] κ が $\forall \lambda < \kappa (2^\lambda < \kappa)$ を充たすとき強極限的という.

Prikry 強制

定義

- $\mathbb{P}_U$ は次を充たす $\langle s, A\rangle$ からなる集合とする：
  1. $s \in [\kappa]^{<\omega}$
  2. $A \in U$
  3. $\max s < \min A$
- $\langle s, A\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle :\Leftrightarrow s \cap (\max t + 1) = t \wedge A \subseteq B \wedge s \setminus t \subseteq B$
- $\langle s, A\rangle \leq^*_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle :\Leftrightarrow \langle s, A\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle \wedge s = t$

ここからは $\mathbb{P}_U$ が Silver-Solovay の解となっていることを示す．

Prikry 強制

定義

- $\mathbb{P}_U$ は次を充たす $\langle s, A\rangle$ からなる集合とする：
  1. $s \in [\kappa]^{<\omega}$
  2. $A \in U$
  3. $\max s < \min A$
- $\langle s, A\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle :\Leftrightarrow s \cap (\max t + 1) = t \wedge A \subseteq B \wedge s \setminus t \subseteq B$
- $\langle s, A\rangle \leq^*_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle :\Leftrightarrow \langle s, A\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle t, B\rangle \wedge s = t$

ここからは $\mathbb{P}_U$ が Silver-Solovay の解となっていることを示す.

まずは $(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G から何が得られるか見てみよう.

V で議論すると, 各 $n \in \omega$ と $\alpha < \kappa$ に対して

- $D_n = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : |s| > n\}$,
- $E_\alpha = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : \max s > \alpha\}$,

は $\mathbb{P}_U$ で稠密である. したがって, $V[G]$ で

$$g = \bigcup \{s : \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\}$$

と定めれば, これは κ で非有界な ω-列である.
したがって次を得る.

補題

- $V[G] \models \mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_U$ が共終数を変えることは分かったが, 基数は保存されているだろうか？

まずは $(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G から何が得られるか見てみよう．
V で議論すると，各 $n \in \omega$ と $\alpha < \kappa$ に対して

- $D_n = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : |s| > n\}$,
- $E_\alpha = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : \max s > \alpha\}$,

は $\mathbb{P}_U$ で稠密である．したがって，$V[G]$ で

$$g = \bigcup\{s : \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\}$$

と定めれば，これは κ で非有界な ω-列である．
したがって次を得る．

補題

- $V[G] \models \mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_U$ が共終数を変えることは分かったが，基数は保存されているだろうか？

まずは $(V,\mathbb{P}_U)$-生成的な G から何が得られるか見てみよう.
V で議論すると, 各 $n\in\omega$ と $\alpha<\kappa$ に対して

- $D_n=\{\langle s,A\rangle\in\mathbb{P}_U : |s|>n\}$,
- $E_\alpha=\{\langle s,A\rangle\in\mathbb{P}_U : \max s>\alpha\}$,

は $\mathbb{P}_U$ で稠密である. したがって, $V[G]$ で

$$g=\bigcup\{s:\exists A(\langle s,A\rangle\in G)\}$$

と定めれば, これは κ で非有界な ω-列である.
したがって次を得る.

補題

- $V[G]\models \mathrm{cf}(\kappa)=\omega$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_U$ が共終数を変えることは分かったが, 基数は保存されているだろうか?

まずは $(V,\mathbb{P}_U)$-生成的な G から何が得られるか見てみよう．
V で議論すると，各 $n\in\omega$ と $\alpha<\kappa$ に対して

- $D_n=\{\langle s,A\rangle\in\mathbb{P}_U:|s|>n\}$,
- $E_\alpha=\{\langle s,A\rangle\in\mathbb{P}_U:\max s>\alpha\}$,

は $\mathbb{P}_U$ で稠密である．したがって，$V[G]$ で

$$g=\bigcup\{s:\exists A(\langle s,A\rangle\in G)\}$$

と定めれば，これは κ で非有界な ω-列である．
したがって次を得る．

補題

- $V[G]\models\mathrm{cf}(\kappa)=\omega$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_U$ が共終数を変えることは分かったが，基数は保存されているだろうか？

まずは $(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G から何が得られるか見てみよう.
V で議論すると, 各 $n \in \omega$ と $\alpha < \kappa$ に対して

- $D_n = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : |s| > n\}$,
- $E_\alpha = \{\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U : \max s > \alpha\}$,

は $\mathbb{P}_U$ で稠密である. したがって, $V[G]$ で

$$g = \bigcup\{s : \exists A(\langle s, A\rangle \in G)\}$$

と定めれば, これは κ で非有界な ω-列である.
したがって次を得る.

補題

- $V[G] \models \mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}_U$ が共終数を変えることは分かったが, 基数は保存されているだろうか?

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. □

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. $\square$

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. □

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. $\square$

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. $\square$

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

基数の保存を見るために $\mathbb{P}_U$ の充たす性質をいくつか確認する.

補題

$\mathbb{P}_U$ は κ^+-鎖条件を充たす.

証明

$|X| = \kappa^+$ なる $X \subseteq \mathbb{P}_U$ は両立する二元を持つことを示せば十分である. $\kappa^{<\omega} = \kappa$ より $\langle s, A\rangle, \langle t, B\rangle \in X$ で $s = t$ なるものが存在する. このとき $\langle s, A \cap B\rangle$ は共通の拡大である. □

系

$\mathbb{P}_U$ は κ^+ 以上の基数を保存する.

$\mathbb{P}_U$ が κ 以下の基数も保存することを見るためには, $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$ の閉包性と Prikry 強制の重要な性質である Prikry 条件を用いる.

補題

$\langle \mathbb{P}, \leq^*_{\mathbb{P}_U} \rangle$ は κ-閉である．すなわち，任意の $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ $(\gamma < \kappa)$ に対して $\forall \alpha < \gamma (p \leq^*_{\mathbb{P}_U} p_\alpha)$ なる $p \in \mathbb{P}_U$ が存在する．

証明

$\langle \langle s_\alpha, A_\alpha \rangle : \alpha < \gamma \rangle$ を $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列とする．U は κ-完備であったから $A = \bigcap_{\alpha < \gamma} A_\alpha \in U$ である．このとき $\forall \alpha, \beta < \gamma (s_\alpha = s_\beta)$ に気を付けると，$\langle s_0, A \rangle$ が減少列の下界となる． $\square$

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して，$q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する．

Prikry 条件の証明には Rowbottom の定理を用いる．

補題

$\langle \mathbb{P}, \leq^*_{\mathbb{P}_U} \rangle$ は κ-閉である．すなわち，任意の $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ $(\gamma < \kappa)$ に対して $\forall \alpha < \gamma (p \leq^*_{\mathbb{P}_U} p_\alpha)$ なる $p \in \mathbb{P}_U$ が存在する．

証明

$\langle \langle s_\alpha, A_\alpha \rangle : \alpha < \gamma \rangle$ を $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列とする．U は κ-完備であったから $A = \bigcap_{\alpha<\gamma} A_\alpha \in U$ である．このとき $\forall \alpha, \beta < \gamma (s_\alpha = s_\beta)$ に気を付けると，$\langle s_0, A \rangle$ が減少列の下界となる． □

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して，$q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する．

Prikry 条件の証明には Rowbottom の定理を用いる．

補題

$\langle \mathbb{P}, \leq^*_{\mathbb{P}_U} \rangle$ は κ-閉である．すなわち，任意の $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ $(\gamma < \kappa)$ に対して $\forall \alpha < \gamma (p \leq^*_{\mathbb{P}_U} p_\alpha)$ なる $p \in \mathbb{P}_U$ が存在する．

証明

$\langle \langle s_\alpha, A_\alpha \rangle : \alpha < \gamma \rangle$ を $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列とする．U は κ-完備であったから $A = \bigcap_{\alpha < \gamma} A_\alpha \in U$ である．このとき $\forall \alpha, \beta < \gamma (s_\alpha = s_\beta)$ に気を付けると，$\langle s_0, A \rangle$ が減少列の下界となる． □

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して，$q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する．

Prikry 条件の証明には Rowbottom の定理を用いる．

補題

$\langle \mathbb{P}, \leq^*_{\mathbb{P}_U} \rangle$ は κ-閉である．すなわち，任意の $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列 $\langle p_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ $(\gamma < \kappa)$ に対して $\forall \alpha < \gamma (p \leq^*_{\mathbb{P}_U} p_\alpha)$ なる $p \in \mathbb{P}_U$ が存在する．

証明

$\langle \langle s_\alpha, A_\alpha \rangle : \alpha < \gamma \rangle$ を $\leq^*_{\mathbb{P}_U}$-減少列とする．U は κ-完備であったから $A = \bigcap_{\alpha < \gamma} A_\alpha \in U$ である．このとき $\forall \alpha, \beta < \gamma (s_\alpha = s_\beta)$ に気を付けると，$\langle s_0, A \rangle$ が減少列の下界となる． □

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して，$q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する．

Prikry 条件の証明には Rowbottom の定理を用いる．

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき $\gamma < \kappa$ として，任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して，f に関して一様な $X \in U$ が存在する．すなわち $\forall n \in \omega(|f``[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ．

Prikry 条件の証明

関数 $f\colon [A \setminus (\max s + 1)]^{<\omega} \to 2$ を次で定める：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \exists X(\langle s \cup t, X\rangle \Vdash \varphi) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

Rowbottom の定理より $B \subseteq A \setminus (\max s + 1)$ で f に関して一様な $B \in U$ が存在する．このとき $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することを示す．そうでないとして，$\langle s \cup t_0, B_0\rangle \Vdash \varphi$ かつ $\langle s \cup t_1, B_1\rangle \Vdash \neg\varphi$ なる $\langle s \cup t_0, B_0\rangle, \langle s \cup t_1, B_1\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, B\rangle$ をとる．ここで $n = |t_0| = |t_1|$ となっているとして良い．今 $f(t_0) = 0 \neq 1 = f(t_1)$ であるが，順序の定義より $t_0, t_1 \in [B]^n$ なので，これは B の一様性に反する．□

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき $\gamma < \kappa$ として，任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して，f に関して一様な $X \in U$ が存在する．すなわち $\forall n \in \omega(|f''[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ．

Prikry 条件の証明

関数 $f\colon [A \setminus (\max s + 1)]^{<\omega} \to 2$ を次で定める：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \exists X(\langle s \cup t, X\rangle \Vdash \varphi) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

Rowbottom の定理より $B \subseteq A \setminus (\max s + 1)$ で f に関して一様な $B \in U$ が存在する．このとき $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することを示す．
そうでないとして，$\langle s \cup t_0, B_0\rangle \Vdash \varphi$ かつ $\langle s \cup t_1, B_1\rangle \Vdash \neg\varphi$ なる $\langle s \cup t_0, B_0\rangle, \langle s \cup t_1, B_1\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, B\rangle$ をとる．ここで $n = |t_0| = |t_1|$ となっているとして良い．今 $f(t_0) = 0 \neq 1 = f(t_1)$ であるが，順序の定義より $t_0, t_1 \in [B]^n$ なので，これは B の一様性に反する．$\square$

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする．このとき $\gamma < \kappa$ として，任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して，f に関して一様な $X \in U$ が存在する．すなわち $\forall n \in \omega(|f``[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ．

Prikry 条件の証明

関数 $f\colon [A \setminus (\max s + 1)]^{<\omega} \to 2$ を次で定める：

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \exists X(\langle s \cup t, X\rangle \Vdash \varphi) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

Rowbottom の定理より $B \subseteq A \setminus (\max s + 1)$ で f に関して一様な $B \in U$ が存在する．このとき $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することを示す．そうでないとして，$\langle s \cup t_0, B_0\rangle \Vdash \varphi$ かつ $\langle s \cup t_1, B_1\rangle \Vdash \neg\varphi$ なる $\langle s \cup t_0, B_0\rangle, \langle s \cup t_1, B_1\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, B\rangle$ をとる．ここで $n = |t_0| = |t_1|$ となっているとして良い．今 $f(t_0) = 0 \neq 1 = f(t_1)$ であるが，順序の定義より $t_0, t_1 \in [B]^n$ なので，これは B の一様性に反する．$\square$

$\mathbb{P}_U^*$ の閉包性と Prikry 条件から次が分かる.

系

$|x| < \kappa$ なる x に対して $\mathbb{P}_U$ は x の部分集合を追加しない.

証明

$(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G に対して $V[G] \models \dot{y}^G \subseteq x$ とする. このとき $\langle s, A \rangle \Vdash \dot{y} \subseteq \check{x}$ なる $\langle s, A \rangle \in G$ が存在する. V で議論すると, Prikry 条件より各 $z \in x$ に対して $\langle s, B_z \rangle$ が $\check{z} \in \dot{y}$ を決定するような $B_z \in U$ をとれる. $|x| < \kappa$ なので $B = \bigcap_{z \in x} B_z \in U$ である.

$$y = \{z \in x : \langle s, B \rangle \Vdash \check{z} \in \dot{y}\}$$

とおけば $\langle s, B \rangle \Vdash \check{y} = \dot{y}$ となる. このとき $\langle s, B \rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A \rangle$ であり, 特に $D = \{\langle t, B \rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A \rangle : \exists w(\langle t, B \rangle \Vdash \check{w} = \dot{y})\}$ が $\langle s, A \rangle$ 以下で稠密なことも分かる. よって $\langle t, B \rangle \in G \cap D$ に対して y を定義しなおせば $y = \dot{y}^G$ となる. □

$\mathbb{P}_U^*$ の閉包性と Prikry 条件から次が分かる.

系

$|x| < \kappa$ なる x に対して $\mathbb{P}_U$ は x の部分集合を追加しない.

証明

$(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G に対して $V[G] \models \dot{y}^G \subseteq x$ とする. このとき $\langle s, A\rangle \Vdash \dot{y} \subseteq \check{x}$ なる $\langle s, A\rangle \in G$ が存在する. V で議論すると, Prikry 条件より各 $z \in x$ に対して $\langle s, B_z\rangle$ が $\check{z} \in \dot{y}$ を決定するような $B_z \in U$ をとれる. $|x| < \kappa$ なので $B = \bigcap_{z \in x} B_z \in U$ である.

$$y = \{z \in x : \langle s, B\rangle \Vdash \check{z} \in \dot{y}\}$$

とおけば $\langle s, B\rangle \Vdash \check{y} = \dot{y}$ となる. このとき $\langle s, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A\rangle$ であり, 特に $D = \{\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A\rangle : \exists w(\langle t, B\rangle \Vdash \check{w} = \dot{y})\}$ が $\langle s, A\rangle$ 以下で稠密なことも分かる. よって $\langle t, B\rangle \in G \cap D$ に対して y を定義しなおせば $y = \dot{y}^G$ となる. $\square$

ここまでの議論により次が分かる.

定理

任意の $(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G に対して次が成り立つ：

(1) $V[G] \models \mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

(2) $V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa^V$.

(3) $\mathbb{P}_U$ は全ての基数を保存する.

証明

(1) 既に確認した.

(2)V において各 $\alpha < \kappa$ に対して $|V_\alpha| < \kappa$ に気を付ければ帰納的に分かる.

(3)κ 以上の基数については良い. (2) より κ 未満の基数についても分かる. すると $V[G]$ において κ は κ 未満の基数の極限であるから, これが基数であることも良い. □

ここまでの議論により次が分かる.

定理

任意の $(V, \mathbb{P}_U)$-生成的な G に対して次が成り立つ：

(1) $V[G] \models \mathrm{cf}(\kappa) = \omega$.

(2) $V_\kappa^{V[G]} = V_\kappa^V$.

(3) $\mathbb{P}_U$ は全ての基数を保存する.

証明

(1) 既に確認した.
(2)V において各 $\alpha < \kappa$ に対して $|V_\alpha| < \kappa$ に気を付ければ帰納的に分かる.
(3)κ 以上の基数については良い. (2) より κ 未満の基数についても分かる. すると $V[G]$ において κ は κ 未満の基数の極限であるから, これが基数であることも良い. □

可測基数は必要か？

- 先程も述べたが, Silver-Solovay の問題に対する解の存在は無矛盾性の意味で ZFC よりも真に強い.
- では可測基数の存在より弱い仮定の下で解を与えることが出来るだろうか？
- 実は次が知られている.

定理

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念が存在するとき, 可測基数の内部モデルが存在する.

$\rightsquigarrow$ すなわち Silver-Solovay の問題に対する解の存在は, ZFC+可測基数の存在と無矛盾性の意味で等しい.

可測基数は必要か？

- 先程も述べたが, Silver-Solovay の問題に対する解の存在は無矛盾性の意味で ZFC よりも真に強い.
- では可測基数の存在より弱い仮定の下で解を与えることが出来るだろうか？
- 実は次が知られている.

定理

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念が存在するとき, 可測基数の内部モデルが存在する.

$\rightsquigarrow$ すなわち Silver-Solovay の問題に対する解の存在は, ZFC+可測基数の存在と無矛盾性の意味で等しい.

可測基数は必要か？

- 先程も述べたが, Silver-Solovay の問題に対する解の存在は無矛盾性の意味で ZFC よりも真に強い.
- では可測基数の存在より弱い仮定の下で解を与えることが出来るだろうか？
- 実は次が知られている.

定理

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念が存在するとき, 可測基数の内部モデルが存在する.

$\rightsquigarrow$ すなわち Silver-Solovay の問題に対する解の存在は, ZFC+可測基数の存在と無矛盾性の意味で等しい.

可測基数は必要か？

- 先程も述べたが, Silver-Solovay の問題に対する解の存在は無矛盾性の意味で ZFC よりも真に強い.
- では可測基数の存在より弱い仮定の下で解を与えることが出来るだろうか？
- 実は次が知られている.

定理

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念が存在するとき, 可測基数の内部モデルが存在する.

$\rightsquigarrow$ すなわち Silver-Solovay の問題に対する解の存在は, ZFC+可測基数の存在と無矛盾性の意味で等しい.

可測基数は必要か？

- 先程も述べたが, Silver-Solovay の問題に対する解の存在は無矛盾性の意味で ZFC よりも真に強い.
- では可測基数の存在より弱い仮定の下で解を与えることが出来るだろうか？
- 実は次が知られている.

定理

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念が存在するとき, 可測基数の内部モデルが存在する.

$\rightsquigarrow$ すなわち Silver-Solovay の問題に対する解の存在は, ZFC+可測基数の存在と無矛盾性の意味で等しい.

内部モデル理論には深入りせずに概略を述べることにする. [3]

定義

$M \subseteq N$ を ZFC の内部モデルとする.
N が M に対して被覆補題を充たすとは, $N \models$ “x は順序数の集合” であるとき $y \supseteq x$ で $N \models$ “$|y| = |x| + \aleph_1$” なる $y \in M$ が存在することをいう.

定理 (Dodd-Jensen)

可測基数の内部モデルが存在しないとき, V は核モデル K に対して被覆補題を充たす.

$\rightsquigarrow$ 核モデルは強制法で変わらないので, 強制拡大で核モデルに対する被覆補題が破れていれば可測基数の内部モデルの存在が分かる.

[3] そもそも発表者は内部モデル理論をよく知らない.

内部モデル理論には深入りせずに概略を述べることにする. [3]

定義

$M \subseteq N$ を ZFC の内部モデルとする.
N が M に対して被覆補題を充たすとは, $N \models$ "x は順序数の集合" であるとき $y \supseteq x$ で $N \models$ "$|y| = |x| + \aleph_1$" なる $y \in M$ が存在することをいう.

定理 (Dodd-Jensen)

可測基数の内部モデルが存在しないとき, V は核モデル K に対して被覆補題を充たす.

$\rightsquigarrow$ 核モデルは強制法で変わらないので, 強制拡大で核モデルに対する被覆補題が破れていれば可測基数の内部モデルの存在が分かる.

[3]そもそも発表者は内部モデル理論をよく知らない.

内部モデル理論には深入りせずに概略を述べることにする.[3]

定義

$M \subseteq N$ を ZFC の内部モデルとする.
N が M に対して被覆補題を充たすとは, $N \models$ "x は順序数の集合" であるとき $y \supseteq x$ で $N \models$ "$|y| = |x| + \aleph_1$" なる $y \in M$ が存在することをいう.

定理 (Dodd-Jensen)

可測基数の内部モデルが存在しないとき, V は核モデル K に対して被覆補題を充たす.

$\rightsquigarrow$ 核モデルは強制法で変わらないので, 強制拡大で核モデルに対する被覆補題が破れていれば可測基数の内部モデルの存在が分かる.

[3] そもそも発表者は内部モデル理論をよく知らない.

内部モデル理論には深入りせずに概略を述べることにする. [3]

定義

$M \subseteq N$ を ZFC の内部モデルとする.
N が M に対して被覆補題を充たすとは, $N \models$ "x は順序数の集合" であるとき $y \supseteq x$ で $N \models$ "$|y| = |x| + \aleph_1$" なる $y \in M$ が存在することをいう.

定理 (Dodd-Jensen)

可測基数の内部モデルが存在しないとき, V は核モデル K に対して被覆補題を充たす.

$\rightsquigarrow$ 核モデルは強制法で変わらないので, 強制拡大で核モデルに対する被覆補題が破れていれば可測基数の内部モデルの存在が分かる.

[3] そもそも発表者は内部モデル理論をよく知らない.

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念を $\mathbb{P}$ とする.

補題

任意の $(V, \mathbb{P})$-生成的な G に対して, $V[G]$ で V に対する被覆補題は成り立たない.

証明

$\mathbb{P}$ が弱到達不能基数 κ の共終数を $\lambda = \mathrm{cf}^{V[G]}(\kappa)$ に潰すとする. このとき $V[G]$ では非有界な $x \subseteq \kappa$ で $|x| = \lambda$ なるものが存在する. もし $y \in V$ で $y \supseteq x$ かつ $V[G] \models |y| = |x| + \aleph_1$ なるものが存在すれば, $\mathbb{P}$ は全ての基数を保存するため $V \models |y| = \lambda + \aleph_1$ である. また y は κ の非有界部分集合となるが, これは $\mathrm{cf}^V(\kappa) = \kappa > \lambda + \aleph_1$ に反する. □

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念を $\mathbb{P}$ とする.

補題

任意の $(V, \mathbb{P})$-生成的な G に対して, $V[G]$ で V に対する被覆補題は成り立たない.

証明

$\mathbb{P}$ が弱到達不能基数 κ の共終数を $\lambda = \mathrm{cf}^{V[G]}(\kappa)$ に潰すとする. このとき $V[G]$ では非有界な $x \subseteq \kappa$ で $|x| = \lambda$ なるものが存在する. もし $y \in V$ で $y \supseteq x$ かつ $V[G] \models |y| = |x| + \aleph_1$ なるものが存在すれば, $\mathbb{P}$ は全ての基数を保存するため $V \models |y| = \lambda + \aleph_1$ である. また y は κ の非有界部分集合となるが, これは $\mathrm{cf}^V(\kappa) = \kappa > \lambda + \aleph_1$ に反する. □

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念を $\mathbb{P}$ とする.

補題

任意の $(V, \mathbb{P})$-生成的な G に対して, $V[G]$ で V に対する被覆補題は成り立たない.

証明

$\mathbb{P}$ が弱到達不能基数 κ の共終数を $\lambda = \mathrm{cf}^{V[G]}(\kappa)$ に潰すとする. このとき $V[G]$ では非有界な $x \subseteq \kappa$ で $|x| = \lambda$ なるものが存在する. もし $y \in V$ で $y \supseteq x$ かつ $V[G] \models |y| = |x| + \aleph_1$ なるものが存在すれば, $\mathbb{P}$ は全ての基数を保存するため $V \models |y| = \lambda + \aleph_1$ である. また y は κ の非有界部分集合となるが, これは $\mathrm{cf}^V(\kappa) = \kappa > \lambda + \aleph_1$ に反する. □

Silver-Solovay の問題の解となるような強制概念を $\mathbb{P}$ とする.

補題

任意の $(V, \mathbb{P})$-生成的な G に対して, $V[G]$ で V に対する被覆補題は成り立たない.

証明

$\mathbb{P}$ が弱到達不能基数 κ の共終数を $\lambda = \mathrm{cf}^{V[G]}(\kappa)$ に潰すとする. このとき $V[G]$ では非有界な $x \subseteq \kappa$ で $|x| = \lambda$ なるものが存在する. もし $y \in V$ で $y \supseteq x$ かつ $V[G] \models |y| = |x| + \aleph_1$ なるものが存在すれば, $\mathbb{P}$ は全ての基数を保存するため $V \models |y| = \lambda + \aleph_1$ である. また y は κ の非有界部分集合となるが, これは $\mathrm{cf}^V(\kappa) = \kappa > \lambda + \aleph_1$ に反する. □

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

おまけ

- 本編では Prikry 条件の証明に Rowbottom の定理を用いた.
- そのため証明は容易になったが, 何が起きているのか分かりにくい.
- 今回は令和の Prikry 強制ということで Rowbottom の定理に頼らない証明も与える.
- Prikry 条件を思い出しておく.

補題 (Prikry 条件)

任意の $p \in \mathbb{P}_U$ と強制言語の文 φ に対して, $q \Vdash \varphi$ または $q \Vdash \neg\varphi$ なる $q \leq^*_{\mathbb{P}_U} p$ が存在する.

証明

$t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して $A_t \in U$ を $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A\rangle$ が φ を決定するような $B \in U$ とし，そのような B が存在しなければ $A_t = \kappa$ とする．

$$A^* = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} A_t = \{\alpha < \kappa : \forall t \in [\kappa]^{<\omega}(\max t < \alpha \to \alpha \in A_t)\}$$

とおくと U は正規より $A^* \in U$ である．次に $t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して，

(1) $X_t^0 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t+1) : \langle t\cup\{\alpha\}, A^* \setminus (\max t+1)\rangle \Vdash \varphi\}$

(2) $X_t^1 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t+1) : \langle t\cup\{\alpha\}, A^* \setminus (\max t+1)\rangle \Vdash \neg\varphi\}$

(3) $X_t^2 = A^* \setminus (X_t^0 \cup X_t^1)$

とおき，$X_t = X_t^i \in U$, $X = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} X_t \in U$ とする．
このとき A^* の定め方より $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A^*\rangle$ が φ を決定するとき $\langle t, A^* \setminus (\max t+1)\rangle$ も φ を決定することに気を付けると，ある $B \subseteq X$ が存在して $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することが分かる．
実際，$\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, X\rangle$ が φ を決定するなら $\langle t, A^* \setminus (\max t+1)\rangle$ も φ を決定する．もし $t \neq s$ なら $X_{t\setminus\{\max t\}} \neq X^2_{t\setminus\{\max t\}}$ より $\langle t \setminus \{\max t\}, (A^* \setminus \max t) \cap X\rangle$ は φ を決定する． □

証明

$t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して $A_t \in U$ を $\langle t, B \rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A \rangle$ が φ を決定するような $B \in U$ とし，そのような B が存在しなければ $A_t = \kappa$ とする．

$$A^* = \Delta_{t \in [\kappa]^{<\omega}} A_t = \{\alpha < \kappa : \forall t \in [\kappa]^{<\omega}(\max t < \alpha \to \alpha \in A_t)\}$$

とおくと U は正規より $A^* \in U$ である．次に $t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して，

(1) $X_t^0 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1) \rangle \Vdash \varphi\}$
(2) $X_t^1 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1) \rangle \Vdash \neg\varphi\}$
(3) $X_t^2 = A^* \setminus (X_t^0 \cup X_t^1)$

とおき，$X_t = X_t^i \in U$，$X = \Delta_{t \in [\kappa]^{<\omega}} X_t \in U$ とする．
このとき A^* の定め方より $\langle t, B \rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A^* \rangle$ が φ を決定するとき $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1) \rangle$ も φ を決定することに気を付けると，ある $B \subseteq X$ が存在して $\langle s, B \rangle$ は φ を決定することが分かる．
実際，$\langle t, B \rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, X \rangle$ が φ を決定するなら $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1) \rangle$ も φ を決定する．もし $t \neq s$ なら $X_{t \setminus \{\max t\}} \neq X^2_{t \setminus \{\max t\}}$ より $\langle t \setminus \{\max t\}, (A^* \setminus \max t) \cap X \rangle$ は φ を決定する． □

証明

$t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して $A_t \in U$ を $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A\rangle$ が φ を決定するような $B \in U$ とし，そのような B が存在しなければ $A_t = \kappa$ とする．

$$A^* = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} A_t = \{\alpha < \kappa : \forall t \in [\kappa]^{<\omega}(\max t < \alpha \to \alpha \in A_t)\}$$

とおくと U は正規より $A^* \in U$ である．次に $t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して，

(1) $X_t^0 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle \Vdash \varphi\}$

(2) $X_t^1 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle \Vdash \neg\varphi\}$

(3) $X_t^2 = A^* \setminus (X_t^0 \cup X_t^1)$

とおき，$X_t = X_t^i \in U$，$X = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} X_t \in U$ とする．
このとき A^* の定め方より $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A^*\rangle$ が φ を決定するとき $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle$ も φ を決定することに気を付けると，ある $B \subseteq X$ が存在して $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することが分かる．
実際，$\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, X\rangle$ が φ を決定するなら $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle$ も φ を決定する．もし $t \neq s$ なら $X_{t\setminus\{\max t\}} \neq X^2_{t\setminus\{\max t\}}$ より $\langle t \setminus \{\max t\}, (A^* \setminus \max t) \cap X\rangle$ は φ を決定する． □

証明

$t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して $A_t \in U$ を $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A\rangle$ が φ を決定するような $B \in U$ とし，そのような B が存在しなければ $A_t = \kappa$ とする．

$$A^* = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} A_t = \{\alpha < \kappa : \forall t \in [\kappa]^{<\omega}(\max t < \alpha \to \alpha \in A_t)\}$$

とおくと U は正規より $A^* \in U$ である．次に $t \in [\kappa]^{<\omega}$ に対して，

(1) $X_t^0 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle \Vdash \varphi\}$

(2) $X_t^1 = \{\alpha \in A^* \setminus (\max t + 1) : \langle t \cup \{\alpha\}, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle \Vdash \neg\varphi\}$

(3) $X_t^2 = A^* \setminus (X_t^0 \cup X_t^1)$

とおき，$X_t = X_t^i \in U$，$X = \Delta_{t\in[\kappa]^{<\omega}} X_t \in U$ とする．
このとき A^* の定め方より $\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, A^*\rangle$ が φ を決定するとき $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle$ も φ を決定することに気を付けると，ある $B \subseteq X$ が存在して $\langle s, B\rangle$ は φ を決定することが分かる．
実際，$\langle t, B\rangle \leq_{\mathbb{P}_U} \langle s, X\rangle$ が φ を決定するなら $\langle t, A^* \setminus (\max t + 1)\rangle$ も φ を決定する．もし $t \neq s$ なら $X_{t\setminus\{\max t\}} \neq X^2_{t\setminus\{\max t\}}$ より $\langle t \setminus \{\max t\}, (A^* \setminus \max t) \cap X\rangle$ は φ を決定する． □

実は Prikry 条件を用いれば Rowbottom の定理は証明できる.

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする. このとき $\gamma < \kappa$ として, 任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して, f に関して一様な $X \in U$ が存在する. すなわち $\forall n \in \omega(|f"[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ.

実は Prikry 条件を用いれば Rowbottom の定理は証明できる.

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする. このとき $\gamma < \kappa$ として, 任意の $f : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して, f に関して一様な $X \in U$ が存在する. すなわち $\forall n \in \omega(|f``[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ.

実は Prikry 条件を用いれば Rowbottom の定理は証明できる.

定理 (Rowbottom)

U を κ 上の正規超フィルターとする. このとき $\gamma < \kappa$ として, 任意の $f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ に対して, f に関して一様な $X \in U$ が存在する. すなわち $\forall n \in \omega(|f``[X]^n| \leq 1)$ が成り立つ.

証明

$\dot{\kappa_{n-1}}$ を Prikry 列の n 番目を表す $V^{\mathbb{P}_U}$ の元とする．このとき $\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U$ に対して $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\}$ とおくと，$\langle s, A\rangle \Vdash \check{s}_i = \dot{\kappa}_i$ $(0 \leq i \leq n-1)$ であることに気を付ける．各 $n \in \omega$ と $\alpha < \gamma$ に対して Prikry 条件より，$\langle \emptyset, X_{n,\alpha}\rangle$ が $\check{f}(\dot{\kappa}_0, \cdots, \dot{\kappa}_n) = \check{\alpha}$ を決定するような $X_{n,\alpha} \in U$ が存在する．
$X = \bigcap_{n\in\omega,\alpha<\gamma} X_{n,\alpha} \in U$ とおくと，各 $n \in \omega$ に対して $\langle \emptyset, X\rangle \Vdash \check{f}(\dot{\kappa}_0, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$ なる $\alpha_n < \gamma$ が存在する．このとき X は f に関して一様である．実際，任意の $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\} \in [X]^n$ に対して

$$\langle s, X\rangle \Vdash \check{f}(\check{s}_0, \cdots, \check{s_{n-1}}) = \check{f}(\dot{\kappa}_0, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$$

である．これは V で $f(s) = \alpha_n$ ということに他ならない． □

証明

$\dot{\kappa_{n-1}}$ を Prikry 列の n 番目を表す $V^{\mathbb{P}_U}$ の元とする．このとき $\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U$ に対して $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\}$ とおくと，$\langle s, A\rangle \Vdash \check{s}_i = \dot{\kappa_i}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ であることに気を付ける．各 $n \in \omega$ と $\alpha < \gamma$ に対して Prikry 条件より，$\langle \emptyset, X_{n,\alpha}\rangle$ が $\check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_n}) = \check{\alpha}$ を決定するような $X_{n,\alpha} \in U$ が存在する．$X = \bigcap_{n\in\omega,\alpha<\gamma} X_{n,\alpha} \in U$ とおくと，各 $n \in \omega$ に対して $\langle \emptyset, X\rangle \Vdash \check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$ なる $\alpha_n < \gamma$ が存在する．このとき X は f に関して一様である．実際，任意の $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\} \in [X]^n$ に対して

$$\langle s, X\rangle \Vdash \check{f}(\check{s_0}, \cdots, \check{s_{n-1}}) = \check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$$

である．これは V で $f(s) = \alpha_n$ ということに他ならない． □

証明

$\dot{\kappa_{n-1}}$ を Prikry 列の n 番目を表す $V^{\mathbb{P}_U}$ の元とする．このとき $\langle s, A\rangle \in \mathbb{P}_U$ に対して $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\}$ とおくと，$\langle s, A\rangle \Vdash \check{s}_i = \dot{\kappa_i}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ であることに気を付ける．各 $n \in \omega$ と $\alpha < \gamma$ に対して Prikry 条件より，$\langle \emptyset, X_{n,\alpha}\rangle$ が $\check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_n}) = \check{\alpha}$ を決定するような $X_{n,\alpha} \in U$ が存在する．
$X = \bigcap_{n\in\omega,\alpha<\gamma} X_{n,\alpha} \in U$ とおくと，各 $n \in \omega$ に対して $\langle \emptyset, X\rangle \Vdash \check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$ なる $\alpha_n < \gamma$ が存在する．このとき X は f に関して一様である．実際，任意の $s = \{s_0, \cdots, s_{n-1}\} \in [X]^n$ に対して

$$\langle s, X\rangle \Vdash \check{f}(\check{s_0}, \cdots, \check{s_{n-1}}) = \check{f}(\dot{\kappa_0}, \cdots, \dot{\kappa_{n-1}}) = \check{\alpha_n}$$

である．これは V で $f(s) = \alpha_n$ ということに他ならない． □

参考文献 I

[1] A. J. Dodd and R. Jensen, *The core model*, Ann. Math. Logic 20(1), 1982, pp. 43–75.

[2] A. J. Dodd and R. Jensen, *The covering lemma for K*, Ann. Math. Logic 22(1), 1982, pp. 1–30.

[3] A. J. Dodd and R. Jensen, *The covering lemma for L[U]*, Ann. Math. Logic 22(2), 1982, pp. 127–135.

[4] M. Gitik, *Prikry type forcing*, in Handbook of Set Theory vol. 2, M. Foreman and A. Kanamori, eds., Springer, 2010, pp. 1351–1447.

[5] A. Kanamori, *The Higher Infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings*, Second edition, Springer, 2003.

参考文献 II

[6] K. Kunen. *Set Theory*, Vol. 34, Mathematical Logic and Foundations, College Publications, 2011

[7] W. J. Mitchell, *The Covering Lemma*, in Handbook of Set Theory vol. 3, M. Foreman and A. Kanamori, eds., Springer, 2010, pp. 1497–1594.

[8] K. L. Prikry, *Changing measurable into accessible cardinals*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), 68:55, 1970, pp. 359–378.

ありがとうございました