



測定誤差と擾乱の不確定性に関する新たな不等式の実験的検証に成功

<概要>

東北大学電気通信研究所・枝松圭一教授，名古屋大学大学院情報科学研究科・小澤正直教授らの研究グループは，量子力学の基本原理のひとつである「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」に関して，「ハイゼンベルクの不等式」が破れており，小澤が提案した「小澤の不等式」と，新たに提案された「ブランシアードの不等式」が成立していることを，弱測定と呼ばれる新しい計測法を用いた実験で検証することに成功しました。本実験技術は，量子暗号の技術開発に重要な役割を果たすことが期待されています。

量子力学では，二つの物理量（例えば位置と運動量）の測定に関して，一方の物理量の測定誤差と，その測定によって他方の物理量が乱される量（擾乱）との間には，一般に，一方を小さくしようとすれば他方を犠牲にしなければならないという「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」があるとされています。この関係は，ハイゼンベルクが提唱した「ハイゼンベルクの不等式」によって正しく表現されるものと思われてきました。しかし，小澤は，ハイゼンベルクの不等式が成立しない場合があることを理論的に明らかにし，2003年に世界で最初にハイゼンベルクの不等式に代わって常に成立する新たな関係式（小澤の不等式）を提唱しました。昨年来，本研究グループを含む複数の実験グループが，中性子や光子を用いた実験によって，ハイゼンベルクの不等式が破れ，小澤の不等式が成立することを実験的に検証しました。

さらに今年，オーストラリアのブランシアードによって，測定誤差と擾乱に関する新たな関係式（ブランシアードの不等式）が提案されました。この関係式は，小澤の不等式を含む改良型で，その実験的検証が期待されていました。今回，本研究グループは，光の偏光に関する「弱測定」と呼ばれる新たな計測法を用いて，ハイゼンベルクの不等式が破れており，小澤の不等式とブランシアードの不等式が成立すること，そして測定された誤差と擾乱の関係が，ブランシアードの不等式が予言する限界に近いものとなっていることを実験的に初めて確認しました。

本研究は，総務省・戦略的情報通信研究開発推進制度(SCOPE)による研究プロジェクト「擾乱計測技術に基づく安全な量子通信の研究開発」の一環として実施され，「測定誤差と擾乱に関する不確定性関係」の新しい理論に基づき，弱測定によって通信路の擾乱を計測することにより，秘匿性を実現する新しい量子暗号技術の開発を目指しています。今回の実験は「測定」という科学技術の基本的事項において，ハイゼンベルクの不等式に代わる新たな基本的限界が存在することを初めて明瞭に検証したもので，量子力学における基本原理の見直しとなることはもちろん，従来の限界を超えた超精密測定技術や普遍的な誤差・擾乱関係に基づく新たな量子情報通信技術の開発が期待される特筆すべき成果と考えられます。

この研究成果は，2014年1月1日に米国物理学会論文誌「Physical Review Letters」（フィジカル・レビュー・レターズ）誌オンライン版に掲載される予定です。

<研究の背景>

ミクロな世界を支配する物理学の基本原理解である量子力学では、二つの物理量（例えば位置と運動量）の測定に関して、一方の物理量の測定誤差と、その測定によって他方の物理量が乱される量（擾乱）との間には、一般に、一方を小さくしようとすれば他方を犠牲にしなければならないトレードオフの関係があるとされています。1927年、ハイゼンベルクは、有名な「ガンマ線顕微鏡の思考実験」において、物体の位置（ x ）を非常に精密に測定しようとすると、測定に伴う反作用によって物体の運動量（ p ）が不可避免的に乱されてしまうことを見出し、位置測定の誤差（ $\epsilon(x)$ ）と運動量の擾乱（ $\eta(p)$ ）の間には次の関係式が成立するものと考えました。

$$\epsilon(x)\eta(p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

この関係式を一般の物理量 A と B に拡張したものが

$$\epsilon(A)\eta(B) \geq C \quad (2)$$

です。ここで、 $\epsilon(A)$ および $\eta(B)$ は各々、 A の（2乗平均平方根）誤差および B の（2乗平均平方根）擾乱（注1）、右辺は $C = \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$ です（注2）。これらの関係式(1)および(2)は、「ハイゼンベルクの不等式」と呼ばれています（注3）。

ハイゼンベルクの不等式(1)および(2)は、アーサーズ-ケリー、小澤、石川らにより、不偏性条件（測定値の平均値が測定される物理量の期待値に一致するという条件）が満たされる特別な場合に成立することが知られていましたが、小澤は、2003年、アーサーズ-ケリーらの式を含み、常に成り立つ新たな関係式

$$\epsilon(A)\eta(B) + \frac{1}{2} \left| \langle [N(A), B] \rangle + \langle [A, D(B)] \rangle \right| \geq C \quad (3)$$

（ $N(A)$, $D(B)$ の意味については注1を参照）

を導き、ハイゼンベルクの不等式は、平均誤差と平均擾乱（注1）が測定対象の物理状態によらず一定な場合には成立するが、そうでない場合には、一般に成立しないことを明らかにしました。また、(3)式から、誤差、擾乱、ゆらぎの間に常に成立する新たな関係式

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq C \quad (4)$$

（ $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ の意味については注3を参照）

を導きました。この(4)式は、実験的に計測可能な関係式で、特に、「小澤の不等式」と呼ばれています。小澤の不等式は、ハイゼンベルクの不等式に代わって常に成立し、測定誤差と擾乱のトレードオフの関係を初めて一般的に証明した革新的な理論式です。 $C \neq 0$ のときハイゼンベルクの不等式では、 $\epsilon(A)=0$ なら $\eta(B)$ は発散し、 $\eta(B)=0$ なら $\epsilon(A)$ は発散しますが、(4)式から、 $\epsilon(A)=0$ でも $\eta(B)$ は発散しないで

$$\sigma(A)\eta(B) \geq C \quad (5)$$

となること、同様に $\eta(B)=0$ でも $\epsilon(A)$ は発散しないで

$$\epsilon(A)\sigma(B) \geq C \quad (6)$$

となることが導かれ、ハイゼンベルクの不等式から導かれた定説を覆す新たな関係が導かれます。さらに、 $\epsilon(A)=0$ または $\eta(B)=0$ の場合には、両辺の等号が成立する測定装置があることが知られています。しかし、そうでない場合に、両辺の等号が成立する場合があるのか、より厳しくかつ常に成立する不等式は存在するのか、等の新たな疑問も生まれました。

2013 年、クイーンズランド大学（オーストラリア）のブランシールドは、小澤の不等式を改良して、 $\varepsilon(A)=0$ または $\eta(B)=0$ 以外の場合にも等号が成立する場合がある、より厳しい関係式（「ブランシールドの不等式」）

$$\varepsilon(A)^2 \sigma(B)^2 + \sigma(A)^2 \eta(B)^2 + 2\varepsilon(A)\eta(B)\sqrt{\sigma(A)^2 \sigma(B)^2 - C^2} \geq C^2 \quad (7)$$

を導きました（注 4）。また、ブランシールドは、電子スピンの向きの測定や光子の偏光の測定の場合などにおいて成立するさらに厳しい不等式

$$\tilde{\varepsilon}(A)^2 \sigma(B)^2 + \sigma(A)^2 \tilde{\eta}(B)^2 + 2\tilde{\varepsilon}(A)\tilde{\eta}(B)\sqrt{\sigma(A)^2 \sigma(B)^2 - C^2} \geq C^2 \quad (8)$$

も導きました。ここで、 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2/4}$ 、 $\tilde{\eta} = \eta\sqrt{1-\eta^2/4}$ です。この不等式は理想的な場合には両辺の間に等号が成り立つことがわかっています。

昨年来、本研究グループを含む複数の実験グループが、中性子や光子を用いた実験で、ハイゼンベルクの不等式(2)が破れ、小澤の不等式(4)が成立することを実験的に検証してきています（例えば、本研究グループによる 2013 年 7 月 17 日報道発表）。その後、新たに提案されたブランシールドの不等式 (7)、(8)の実験的検証が期待されていました。

<研究の方法>

今回、本研究グループは、光の偏光に関する「弱測定」と呼ばれる新たな計測法を用いて、小澤の不等式とブランシールドの不等式が成立すること、そして測定された誤差と擾乱の関係が、ブランシールドの不等式(8)が予言する限界に近いものとなっていることを実験的に初めて確認しました。今回の研究では、光の量子である「光子」（注 5）の偏光（注 6）を用い、縦横方向の偏光測定の強度を変化させたときの、「縦横方向の偏光測定における誤差」および「その測定によって斜め 45 度方向の偏光が受ける擾乱」を計測しました。測定誤差と擾乱の計測には、3 状態法と呼ばれる方法と、今回採用した弱測定法と呼ばれる二つの方法が知られています。弱測定とは、測定の強さをできる限り弱めることで、測定対象となる系の状態をほとんど変えずに測定を行う計測法です。誤差や擾乱の計測を行いたい実験装置（MA）の前段に弱測定の実験装置（WP）を配置し、WP の測定結果と MA の測定結果を比較することで、MA の誤差や擾乱を計測することができます。本研究では、測定の強さが非常に弱い WP を採用し、測定対象となる系（すなわち光子の偏光状態）をほとんど変えることなく、精密に誤差や擾乱を評価する手法を開発しました（図 1）。また、この測定系は、ブランシールドの不等式(8)が成立するために必要な条件を満たしています。これらの技術を用いることで初めて、ブランシールドの不等式(8)における下限に近づく明瞭な検証実験が可能になりました。

<成果の内容>

図 2 に、MA における縦横方向の偏光測定の強度を変化させたときの、「縦横方向の偏光測定における誤差」および「その測定によって斜め 45 度方向の偏光が受ける擾乱」の計測結果を示します。測定強度が大きくなるに伴い、誤差は減少する一方、擾乱は増大し、両者の間にトレードオフの関係があることがわかります。

図 3 に、MA における測定の強度を変化させたときの、誤差および擾乱に関するハイゼンベルクの不等式(2)、小澤の不等式(4)、ブランシールドの不等式(7)および(8)の左辺を示します。この

実験では、不等式の右辺は $C=0.995$ になります（注6）。図から明らかなように、ハイゼンベルクの不等式の左辺は右辺を下回り、不等式(2)が破れているのに対し、小澤の不等式(4)、ブランシアードの不等式(7)および(8)は保たれていることがわかります。特に、不等式(8)の左辺は、不等式が予言する下限 $C=0.995$ に近い値となっており、不等式(8)において等号が成立する条件に近い状態が実現されていることがわかります。また、図の実線は測定に用いた光学素子（偏光プリズム）の不完全性を考慮した場合の理論値で、実験値をよく再現していることがわかります。

図4に、誤差と擾乱に関する測定結果と不等式の下限値を、誤差を横軸、擾乱を縦軸にプロットしたものを示します。実験結果はハイゼンベルクの不等式を破り、他の不等式は満たす領域にあることがわかります。このことは、二つの物理量（この場合は縦横方向偏光と斜め45度方向の偏光）に関する誤差と擾乱がハイゼンベルクの不等式から予言される下限値よりも小さいこと、すなわち、二つの物理量がハイゼンベルクの不等式によって制限されると思われていたものよりも高い精度で同時に測定可能であることを示しています。また、実験結果は小澤の不等式を満たしていますが、小澤の不等式における下限値よりもかなり大きい領域にあります。その一方で、実験結果はブランシアードの不等式(8)の下限に近接しており、理想的な実験を行った場合にはブランシアードの不等式(8)が誤差と擾乱の関係の下限値を与えることがわかります。

<研究の意義および今後の展開>

量子力学が誕生してほぼ100年となりますが、小澤の不等式を契機として、「不確定性関係」に関する議論がたいへん活発になっています。理論的には、小澤の不等式を改良したブランシアードの不等式の導出や、それらとは異なる誤差、擾乱の定義に基づく不確定性関係の提案など、多く議論が活発に行われています。実験的には、前述したように、中性子や光を用いた検証実験が行われ、ハイゼンベルクの不等式が破れる場合があること、その場合でも小澤の不等式が成立することが検証されています。これらの研究の潮流の中で、本研究のもつ意義は二つあります。

1. 本研究は、新たに提案されたブランシアードの不等式に対する初の検証実験となります。従来の検証実験によって、ハイゼンベルクの不等式が破れ、小澤の不等式が成立することはわかりましたが、誤差と擾乱の不確定性関係を保ちつつそれらをどこまで小さくすることができるのか、その下限は明らかではありませんでした。本研究によって、小澤の不等式よりも厳しいブランシアードの不等式が検証されるとともに、誤差と擾乱が達し得る下限に関して新たな知見に達することができました。なお、ブランシアードの不等式については、オーストラリアの研究グループも本研究とは独立に検証実験を行っており、その結果は本研究と同時に同じ雑誌（フィジカル・レビュー・レターズ）への掲載が決定しています。本研究が国際的にも注目され、競争が激化している分野における成果であることの証左でもあります。
2. 本研究では、弱測定法と呼ばれる新たな計測法を用いて誤差と擾乱を計測しました。弱測定法は、誤差と擾乱を計測する以外にも、被測定系の状態を変化させずに物理量を計測する一般的な計測法として期待され、近年盛んに研究されています。従来は、理想的な弱測定を実現して誤差、擾乱を計測することは困難でしたが、本研究では、被測定系の状態をほとんど変化させないほぼ理想的な弱測定系を開発し、誤差と擾乱の計測に用いました。このような技術を用いて初めて、上述したような誤差と擾乱に関する明瞭な検証実験が可能になりました。

本研究の成功は、物理のみならず科学技術一般に広く行われる「測定」という行為に対し根本的な制限を課す「不確定性関係」への見直しとなることはもちろん、従来の不確定性関係の枠を超えた超精密測定技術や新たな量子情報通信技術の開発などの多くの応用を拓くものであり、量子物理の基礎のみならず応用上もたいへん重要な成果です。

今回の研究では、1個1個の光子の偏光の測定における誤差と擾乱を計測し、その関係がハイゼンベルクの不等式を破ることを検証し、小澤やブランシアード等による新しい不等式を満たしていることを観測しました。光子の偏光は、各々の測定結果は2通り（例えば縦偏光と横偏光のどちらか）となる点で、電子や中性子における「スピン」と同じ2次元系とみなされる状態です。今後は、さらに次元の高い物理状態や、ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の思考実験で出てくる位置と運動量などのように、連続的な値を取り得る物理状態に対する不確定性を検証する実験にも取り組みたいと考えています。そのような研究を通して、不確定性に関するさらなる理解と応用が広がるものと期待しています。

<研究助成資金等>

- 総務省 戦略的情報通信研究開発推進制度(SCOPE) 121806010（研究代表者：小澤正直）
- 文部科学省・日本学術振興会グローバル COE プログラム「情報エレクトロニクスシステム教育研究拠点」（東北大学，拠点リーダー：安達文幸）
- John Templeton 財団・研究助成 35771（研究代表者：小澤正直）
- 日本学術振興会 科学研究費補助金 21244047（研究代表者：小澤正直）

<掲載論文名>

“Experimental Test of Error-Disturbance Uncertainty Relations by Weak Measurement”
(弱測定による誤差-擾乱の不確定性関係の実験的検証)

Fuminhiro Kaneda, So-Yong Baek, Masanao Ozawa, and Keiichi Edamatsu

Physical Review Letters (American Physical Society) 2014年1月1日(オンライン版)

<参考図>

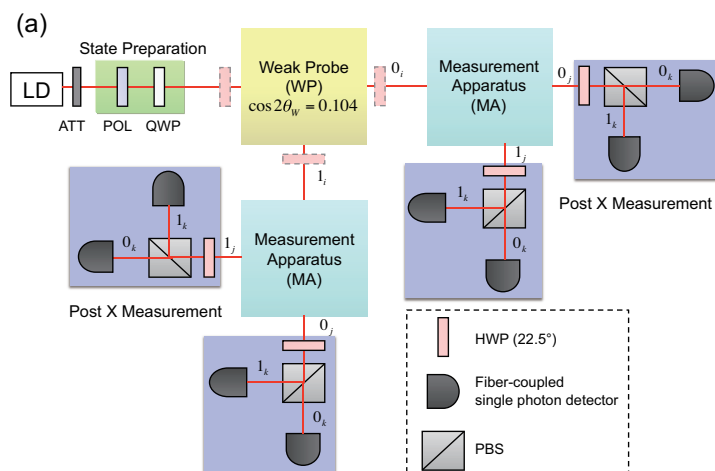


図1. 光子の偏光における弱測定法を用いた測定誤差と擾乱の計測装置。半導体レーザー (LD) から出た光は単一光子レベルまで減光された後、円偏光として装置に入射する。中央の黄色の部分が弱測定(WP)の実験装置で、縦横偏光(誤差の計測の場合)あるいは斜め45度方向(擾乱の計測の場合)のいずれかの偏光測定を弱い測定強度で行う。その後の水色の部分が主測定装置(MA)であり、縦横方向の偏光測定を種々の測定強度で行う。その後の紫色の部分(PM)は斜め45度方向の偏光測定を行う。各々の測定装置によって2光路のどちらかに出力された光子は、最後に8台の検出器のいずれかで検出される。光子がどの検出器で検出されたかによって、WP、MA および PM の測定結果がわかる。WP の測定結果と MA(PM)の偏光測定の結果を比較することで誤差(擾乱)を計測する。

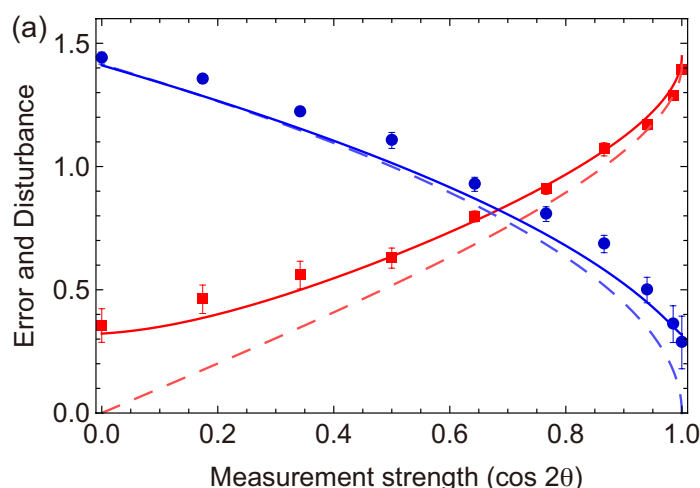


図2. MA における縦横方向の偏光測定の強度(横軸)を変化させたときの、縦横方向の偏光測定における誤差(青)および斜め45度方向の偏光測定の擾乱(赤)。丸、四角等のマークが計測結果で、測定強度が大きくなるに伴い、誤差は減少する一方、擾乱は増大する。破線は理想的測定装置の理論値、実線は実際の測定装置の性能を加味した理論値。

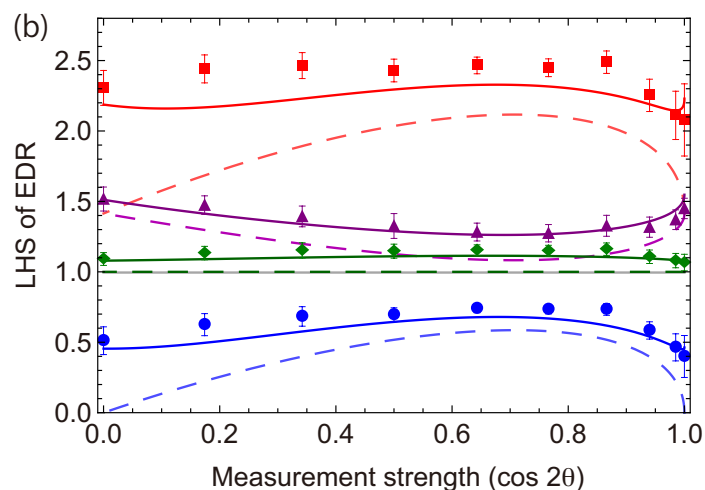


図3. MA における測定の強度(横軸)を変化させたときの、誤差および擾乱に関する不等式の成立状況。丸、四角等のマークは実験結果、破線は理想的測定装置の理論値、実線は実際の測定装置の性能を加味した理論値。青のデータがハイゼンベルクの不等式(2)の左辺、赤のデータが小澤の不等式(4)の左辺、紫および緑のデータがブランシアードの不等式(7)および(8)の左辺。不等式の右辺はいずれも $C=0.995$ であり、中央のグレーの実線で表す。ハイゼンベルクの不等式(2)の左辺は右辺を下回り、不等式が破れているのに対し、その他の不等式(4), (7), (8)は満たされている。特に、不等式(8)の左辺の実験値は下限値 $C=0.995$ に近い。

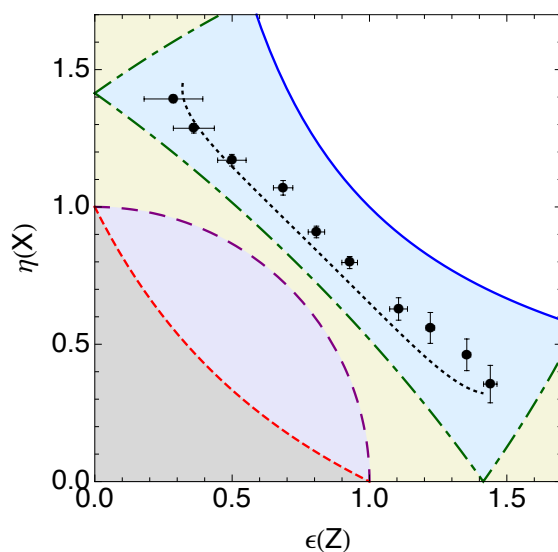


図4. 誤差と擾乱に関する測定結果と不等式の下限値を、誤差を横軸、擾乱を縦軸にプロットしたもの。黒丸は実験結果、黒点線は実際の測定装置の性能を加味した理論値。青の実線がハイゼンベルクの不等式(2)、赤の点線が小澤の不等式(4)、紫の破線および緑の一点鎖線がブランシアードの不等式(7)および(8)における下限値。各々の下限値より左下方は不等式を破る領域である。実験値はハイゼンベルクの不等式を破り、他の不等式は満たす領域にある。特に、ブランシアードの不等式(8)の下限に近接していることがわかる。

<用語説明>

注 1) 2 乗平均平方根誤差と平均誤差

測定したい物理量を A とし、 A を測定する装置が示す値の物理量を M とする。この測定に関する A の誤差を表す物理量を $N(A) \equiv M - A$ と書く。このとき、 A の「2 乗平均平方根誤差」は $\epsilon(A) = \sqrt{\langle (N(A))^2 \rangle}$ と定義される。ここで $\langle \dots \rangle$ は、測定対象の物理状態に対する平均値を表す。また、 A の「平均誤差」は $\langle N(A) \rangle$ と定義される。測定対象の物理状態によらず平均誤差が 0 となる場合、その測定を「不偏測定」と呼ぶ。

次に、物理量 B の擾乱を表す物理量を $D(B) \equiv B' - B$ と書く。ここで B' は、 A の測定による擾乱を受けた後の B を表す物理量である。 $D(B)$ に対しても、誤差の場合と同様に 2 乗平均平方根擾乱 $\eta(B) = \sqrt{\langle (D(B))^2 \rangle}$ と平均擾乱 $\langle D(B) \rangle$ が定義される。

注 2) 式(2)の説明

量子力学では、物理量（位置や運動量など）は波動関数に作用する「演算子」として扱われる。二つの演算子 A と B を考えたとき、 $AB=BA$ が成立するとき、それらは「交換する」という。また、 $[A, B] \equiv AB - BA$ を「交換子」と呼ぶ。 $\langle \dots \rangle$ は、対象の物理状態に対する平均値を表す。(2)式から、 A と B が交換するとき、右辺は 0 となって、 A の誤差 ($\epsilon(A)$) と B の擾乱 ($\eta(B)$) はどちらも 0 となり得ることがわかる。ところが、 A と B が交換しないときには、右辺は一般的に 0 ではなく、 A の誤差 ($\epsilon(A)$) と B の擾乱 ($\eta(B)$) との間に、一方が小さいと他方が大きくなる（特に、一方が 0 であれば他方は無限大となる）トレードオフの関係があることがわかる。

注 3) 二種類の「ハイゼンベルクの不等式」（あるいは「ハイゼンベルクの不確定性関係」）

(1)および(2)式は、測定誤差と擾乱に対するハイゼンベルクの不等式であり、本文で述べたガンマ線顕微鏡の思考実験に対応する不等式である。一方、同じくハイゼンベルクの不等式と呼ばれるもう一つの不等式が存在する。それは

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq C \quad (*)$$

と表される。右辺は(2)式と同じであるが、左辺の $\sigma(A)$, $\sigma(B)$ は各々、対象の物理状態における A および B のゆらぎ（ A と B をそれぞれ独立に観測したときに得られる結果のばらつきを標準偏差で表したもの）である。これらは、(2)式における測定誤差と擾乱とは全く別の量であり、(2)と(*)とは物理的に異なることがらを表している。にもかかわらず、どちらも同じく「ハイゼンベルクの不等式」（あるいは「ハイゼンベルクの不確定性関係」）と呼ばれているために、相当の混乱が生じている。(*)はロバートソンによって数学的に証明されており（従って常に成立する）、「ロバートソンの不等式」とも呼ばれる。測定誤差と擾乱に関する不等式(2)は、(*)にさらにある仮定を加えて導かれるという関係にある。従って、(2)はそのような仮定の下でのみ成立するものであり、仮定が満たされないときには（本研究で検証したように）破れる場合がある。量子力学の初等的教科書では大抵、(*)をハイゼンベルクの不確定性関係と呼び、(2)と区別していないため、大きな混乱を招いている。本研究で「ハ

「ハイゼンベルクの不確定性関係」の破れを検証したのは(2)式についてであり、(*)式ではないことに特に注意されたい。

注4) ブランシアードの不等式と小澤の不等式，ハイゼンベルクの不等式の関係

ブランシアードの不等式(7)から，さらに簡単な不等式

$$\epsilon(A)\sigma(B)+\sigma(A)\eta(B)\geq C \quad (7')$$

を導くことができる ((7')の両辺を二乗して(7)と比べるとわかる)。(7')は，小澤の不等式(4)から第1項 (ハイゼンベルクの不等式(2)に現れる項) を取り除いたものである。従って，(7')は小澤の不等式(4)を含み，(7)は(7')を含む。つまり，ブランシアードの不等式(7)から小澤の不等式(4)を導くことができる。ただし， $\epsilon(A)=0$ または $\eta(B)=0$ の場合は，ブランシアードの不等式と小澤の不等式は同じ不等式を表す。

注5) 光子

光の量子．光量子ともいう。

注6) 偏光

光の波（電磁波）としての振動方向を偏光という。1個の光子の偏光状態は，1つのスピンのように振る舞い，量子情報の基本単位である量子ビット（キュービット）としても利用される。光子の縦横方向の偏光測定の演算子と，斜め45度方向の偏光測定の演算子とは交換しない（注2参照）ため，(2)あるいは(4)式の右边が0ではなくなり，測定誤差と擾乱に関する不確定性関係の検証に利用できる。

注6) 不等式の右边

今回の実験では，装置に入射する光の偏光状態として円偏光を用いた。この場合，「縦横方向の偏光 (A)」および「斜め45度方向の偏光 (B)」に関する不確定性関係の右边は，理想的には $C = \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right| = 1$ となる。今回の実験条件では，MAに入射する光子の偏光状態はWPの微小な影響を受けて僅かながら変化するため， $C=0.995$ になると見積もられる。