

不確定性原理の新しい姿

小澤正直

おざわ まさなお
名古屋大学大学院情報科学研究科

量子力学の基本原則として有名な不確定性原理は、微視的対象に関するわれわれの認識には大きな制約があることを明らかにし、ニュートン力学の描く決定論的な世界観を覆すという大きな社会的影響を与えた。しかし、その定量的表現をめぐり、不確定性原理の正当性には教科書の記述においてさえも曖昧な部分が残されていた。最近の研究で明らかにされたその新しい姿を紹介する。

ラプラスの悪魔

人類は古くから天体の運行に関心を抱き、星の配置から季節を知り、農業に必要な暦を作成した。ニュートン力学は、天体の運行を予測することにかけて人類の知恵の集大成であるとともに、われわれの経験世界が本来的に予測可能であるという決定論的世界観を生み出した。ニュートンの運動方程式は、質点の位置の時間に関する2階微分方程式であり、2つの初期条件が定まれば、解が一意的に決定する。つまり、過去の位置と速度(または、運動量)を知れば、過去・未来すべての時刻における運動を知ることができる。もちろん、解が存在することと、解くことができることには大きな隔たりがあるが、ラプラスの悪魔のたとえ話は、理想的な知性にとってそれが可能であるとした。19世紀末は、物理学者がラプラスの悪魔に最も近づいたと感じた時期であった。

プランクの量子仮説

いつの時代も、産業からの要請は科学を推進する大きな原動力である。情報化社会の現在、「産業の米」とたとえられるのが半導体だとすれば、産業革命を経た当時の産業を支えたのは、「鉄は国家なり」と呼ばれ、「産業の米」と呼ばれた鉄であった。古来、製鉄技術は、千数百度といわれる熔鉱炉の温度の維持管理に依存したが、当時、この課題は、分光学という新しい物理学を生み出した。熔鉱炉から発せられる輻射のスペクトル分布と温度の関係は、無限に多くの振動子に対する運動方程式を確率的に扱う統計力学の方法で扱われた。ヴィーンの公式、レイリー・ジーンズの公式が生まれ、これらの公式を実験的に検証することが大きな問題とされた。ドイツの国立研究所で行われた実験研究は、産業への応用上、十分な精度でそれらの公式が実証された後も、世界一の精度を目指して続けられた。高温かつ長波長の実験が可能になるにつれ、従来の公式の不備が明らかになり、実験データを説明する正しい公式は何かという問題が提起された¹⁾。

1900年にこの問題を解決したドイツの物理学者プランクの成果は、よく知られている。プランクは、まず、実験データをよく再現する実験式を導いたが、その物理的意義を見出すための努力の結果、その公式は、振動子のエネルギーがとびとびの値をとるという仮説(量子仮説)から理論的に導かれることを突き止めた。プランクの量子仮説は

素過程に関する間接的な仮説に過ぎなかったが、1905年にアインシュタインが光電効果の理論を作り上げると、光と物質が交換するエネルギーは、プランクが仮定したのと同じとびとびの値しかとらないことが明らかになった。

ハイゼンベルクの行列力学

量子力学はこのような古典力学と相容れない仮説をより根本的な原理から系統的に導くための新しい力学の体系として生まれた。1925年にハイゼンベルクによって発見された行列力学は、物理量の非可換性というまったく新しい数学的仕組みによって量子仮説を説明した。質点の位置(の座標成分)を表わす物理量を Q 、運動量(の対応する成分)を表わす物理量を P とする。古典力学では、物理量は実変数で表わされ、かけ算は交換法則を満たす。したがって、 $PQ - QP = 0$ が成り立つ。一方、行列力学では、物理量は無限次のエルミート行列^{*1}で表わされ、とりうる値はその固有値であるという仮説が導入された。すると、質点の位置を表わす行列 Q と運動量を表わす行列 P の間に交換関係

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} I \quad (1)$$

が成立すれば、 Q と P が連続的な値をもつにもかかわらず、振動子のエネルギーを表す行列 $\frac{1}{2m}P^2 + \frac{m\omega^2}{2}Q^2$ が離散的な値 $h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) しかとらないことが示された。ただし、 I は単位行列、 h はプランク定数、 m は質量、 ν は振動数、 ω は角振動数を表わす。

このようにしてハイゼンベルクは量子力学の最初の発見者となったのであるが、翌1926年には、シュレーディンガーが波動力学という別の定式化

を発見した。波動力学では、質点の状態を表わす波動関数が波動方程式と呼ばれる偏微分方程式に従って変化する。行列の計算に慣れていない当時の物理学者には、波動力学が好まれ、広まっていた。シュレーディンガーは、波動関数が空間に実在する波を表わし、量子力学において連続性が回復されたと主張したが、ボルンは、波の正体が確率振幅という抽象的な数学概念であることを明らかにし、その主張を退けた。

ハイゼンベルクの不確定性原理

ハイゼンベルクが取り組んだ次の問題は、物理量の非可換性、特に、交換関係(1)の操作的意味は何かということであった。これには、アインシュタインの「何が測定可能かはその理論自身が決めるべきだ」という助言を指針にしたと伝えられる。1927年に有名なガンマ線顕微鏡の思考実験から導かれた結論は、非可換な物理量である位置 Q と運動量 P を同時に正確に測定することはできず、その測定誤差 $\varepsilon(Q), \varepsilon(P)$ には

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2)$$

という関係があるということであった^{*2,3}。この不確定性原理は、微視的スケールでは、粒子の位置と運動量を共に正確に知ることができないことを定量的に明らかにし、ニュートン力学の決定論的世界観を覆したことで大きな社会的反響を呼んだ。

ここで、「同時に」という言葉に注目すると、これは、 Q と P に対して必ずしも「同時に」測定装置を作動させることを意味するのではなく、同時刻の Q と P をともに正確に決定できないと解釈すべきである。実際、ガンマ線顕微鏡の思考実験では、位置 Q を誤差 $\varepsilon(Q)$ で測定すると、その測定の反作用によって、運動量 P が $\eta(P)$ だけ

*1—量子力学の基本的な枠組みに関して、後に、フォン・ノイマン²によって数学的に異論のない公理系が与えられた。それによれば、物理量はヒルベルト空間の稠密な部分空間で定義された超巨大エルミート作用素(現代の用語では、自己共役作用素)で表わされる。これは、実数パラメータの単位の分解をもつ作用素として特徴付けられる。

*2—ただし、ハイゼンベルクの原論文では、 $\varepsilon(Q)\varepsilon(P) \sim h$ と書かれ、正確な下限の値 $\frac{h}{4\pi}$ は後にケナード⁴によって導かれた。

変化し、それらの間に

$$\varepsilon(Q)\eta(P) \geq \frac{h}{4\pi} \quad (3)$$

という関係があることを示している。この $\eta(P)$ を運動量 P の擾乱と呼ぶ。この場合、 Q の測定直後の P を正確に測定しても、 Q の測定直前の P に関する測定誤差は、 $\varepsilon(P)=\eta(P)$ で与えられ、式(2)が得られる。

ハイゼンベルクは、「誤差」と「擾乱」の一般的な定義を与えていないが、後述するように、誤差は、真値と測定値の差の平均的な値、擾乱は、測定の前後での平均的变化量と解釈される。また、この「平均的」とは、ゆらぎとの関係に関する議論から「2乗平均平方根」の意味で解釈すべきである。

ケナードの不等式

ハイゼンベルクは、式(3)をガンマ線顕微鏡の思考実験で導いた直後に、「この関係は、交換関係(1)の数学的帰結である」と述べて、数学的正当化を試みている。その中で、交換関係(1)からディラック・ヨルダンの理論を通して、任意のガウス型波動関数において、位置のゆらぎ $\sigma(Q)$ と運動量のゆらぎ $\sigma(P)$ の間に

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{h}{4\pi} \quad (4)$$

という関係が成り立つことを示した*³。位置と運動量のゆらぎに関するこの不等式は、ハイゼンベルクの論文発表直後に、ケナード⁴によって任意の波動関数に対して成立することが証明され、ケナードの不等式と呼ばれるようになった*⁴。

「ゆらぎ」というのは、与えられた状態で測定装置に関わりなく存在する量子物理量の値の不確定性であり、測定誤差とは異なる概念である。一般に、与えられた状態における物理量 A のゆら

ぎは、 A を誤差なしで測定する装置を用い、同一の状態で多数回測定したときに現れる測定値のばらつきの大きさを、測定値の2乗の平均から測定値の平均の2乗を引いた値の平方根と定義される。

ハイゼンベルクによる不等式(3)の導出では、ケナードの不等式(4)を測定直後の波動関数に適用している。古典力学では、系を乱すことなく、位置 Q を正確に測定してから、運動量 P を正確に測定することができ、その結果、少なくともそれらの測定の直後には、位置 Q と運動量 P がそれぞれの測定値で定まる確定した値をもっていることが知られる*⁵。量子力学では、測定により状態が変化する。位置 Q を正確に測定してから、運動量 P を正確に測定したとしても、測定直後の状態はケナードの不等式を満たすので、位置と運動量が確定した状態が得られることはない。したがって、測定直後の波動関数に着目することで、不確定性原理の導出が期待される。しかし、ハイゼンベルクの議論を現代的に吟味すると、次の二つの条件(H1)、(H2)を暗黙のうちに仮定していて、無条件で不確定性原理が導かれるわけではないことがわかる。(H1)波束の収縮により位置 Q のゆらぎが減少するため、測定直後の波動関数では $\varepsilon(Q) \geq \sigma(Q)$ が成り立つ。(H2) Q の誤差 $\varepsilon(Q)$ と P の擾乱 $\eta(P)$ は測定直前の状態に依存しない。

仮定(H2)から、測定直前には、測定される質点が静止していたとしても一般性を失わない。すると、測定直後の波動関数をもつ運動量のゆらぎはすべて測定のプロセスに由来すると考えられるから、 $\eta(P) \geq \sigma(P)$ が成り立つ。したがって、(H1)、(H2)の下でケナードの不等式(4)からハイゼンベルクの不等式(3)が得られる*⁶。

*5—実際は、測定が系を乱さないの、それらの測定の直前にも位置と運動量の値がそれぞれの測定値をもっていたと結論される。

*6—ハイゼンベルク³は、さらに、測定直後の状態がガウス型波動関数であると仮定して、自身が導いたガウス型波動関数に対する式(4)を適用しているが、ケナード⁴によって式(4)が任意の波動関数に対して証明されたので、この仮定は落とすことができる。

*3—本稿では、「ゆらぎ」とは「標準偏差」のことと定義する。

*4—ただし、ケナードの原論文では、「ゆらぎ」を「標準偏差」の $\sqrt{2}$ 倍と定義しているので、「ゆらぎ」の積が満たす下限は $\frac{h}{2\pi}$ とされた。

上の議論から明らかなように、ハイゼンベルクは、ゆらぎの関係(4)と誤差と擾乱の関係(3)を混同していたのではなく、測定直後の状態がゆらぎの関係(4)を満たすという数学的事実から、誤差と擾乱の関係(3)が帰結すると主張したのである。しかし、後に、ケナードの不等式(4)は、ハイゼンベルクの不等式(3)の形式的表現であるとししばしば説明されるようになった*7。上の検討から明らかなように、式(4)は式(3)を一般的には導かない。というのは、ハイゼンベルクの議論は、他に付加的な条件を仮定しているからである。ケナードの不等式(4)がハイゼンベルクの不等式(3)の形式的表現であるという説明は、その仮定を無視していることになる。

一方、「不確定性原理」は、測定誤差や擾乱に関する不等式ではなく、位置と運動量のゆらぎに関するケナードの不等式を意味するという説明がなされることもある*8。確かに、ケナードの不等式が交換関係の帰結として極めて根本的な公式であることには違いない。また、量子状態の性質をよく表し、原子の安定性を導く議論で利用されたりする。しかし、その場合は、「不確定性原理」は、粒子の位置と運動量を共に正確に知ることができないことを表わしているとは言えないであろうし、ニュートン力学の決定論的世界観を覆したことで大きな社会的反響を呼んだ「あの関係」ではないことになる。つまり、「不確定性原理」を特徴付ける認識論的な結論をケナードの不等式から直接導くことはできないと考えられる。というのも、この不等式は、量子力学における唯一の認識過程である測定という概念と無関係に導かれたからだと言えよう。

また、量子力学の実在論的解釈をめぐって、「ケナードの不等式から、位置と運動量は同時に確定した値をもたないことが結論される」と説明されることもあるが、これも疑問である。このよ

うな主張は、通常、コッヘン・シュペッカーの定理と呼ばれているが、この定理の証明は、ケナードの不等式から容易に導かれるようなものではない。たとえば、ブラウン運動をする粒子も位置と運動量のゆらぎをもっているが、位置と運動量は同時に確定した値をもつと考えられ、ニュートン力学の決定論的世界観に従うと考えられる。ゆらぎがあるというだけから、ゆらぎの原因がわれわれの無知によるものか、それともそもそも同時に確定した値をもたないことによるものなのかを判定することは難しい問題である*9。

ロバートソンの不等式

1929年にロバートソン⁶は、ケナードの不等式(4)を任意の物理量 A, B に対して、次の形に一般化した。

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \quad (5)$$

ここで、 $[A, B]$ は交換子 $[A, B] = AB - BA$ を表わし、 σ と $\langle \dots \rangle$ は、それぞれ与えられた状態におけるゆらぎと平均値を表わす。これに伴い、ハイゼンベルクの不等式(3)も任意の物理量 A, B に対して、 A の測定における誤差 $\varepsilon(A)$ とそれに伴う B の擾乱 $\eta(B)$ に関する次の関係に一般化される。

$$\varepsilon(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \quad (6)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$ は測定直前の期待値を表わす。その後の研究で、 A と B の同時測定の誤差 $\varepsilon(A), \varepsilon(B)$ に関する一般化されたハイゼンベルクの不等式

$$\varepsilon(A)\varepsilon(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \quad (7)$$

が、 A, B 双方について不偏的、つまり、任意の状態において A, B それぞれの測定値の平均値が

*7—たとえば、フォン・ノイマン『量子力学の数学的基礎』(邦訳)²の233ページを参照。

*8—たとえば、ニールセンとチャンの量子情報と量子計算の教科書⁵の89ページ参照。

*9—たとえば、EPRのパラドックスは、そのような判定が難しい例を与える。事態を単純化したスピンのケースでは、スピンの異なる2成分が局所的な隠れた変数によって確定されていると結論されるが、それはケナードの不等式を一般化したロバートソンの不等式が表わしているのではなく、バルの不等式から結論される。

真の平均値に等しい測定について成立することが導かれた⁷⁻⁹。この関係から、 A の平均誤差(真値と測定値の差の単純な平均値)と B の平均擾乱(測定前後の変化量の単純な平均値)が任意の状態において共にゼロなら、式(6)が成立することが導かれる¹⁰。

重力波の検出と不確定性原理の破綻

ハイゼンベルクの不等式(3)の正当性に関する吟味は、長いこと不問に付されてきた。というのも、右辺のプランク定数は極めて小さな量であり、この関係を検証・反証できるほど精密な測定技術がなかったためである。不確定性原理の正当性が、思考実験を越えて、実験による反証可能性を前提に議論されるようになったのは、レーザーによる精密測定技術が進歩した1970年代以降である。

1970年代末に量子光学の技術を利用して重力波の検出を試みるというプロジェクトが計画されたときに、ハイゼンベルクの不確定性原理から重力波検出装置の検出限界が導かれるという考えが広まった。1980年に、ブラジンスキー、ヴォロンツォフ、ソーン¹¹は、干渉計型検出器のように自由質点の位置を監視することにより重力波の検出を行なう検出装置には、不確定性原理(3)に由来する感度の限界が存在すると主張した。この感度限界は、「標準量子限界」と呼ばれ、広く受け入れられた。しかし、1983年にユエンは、測定後の状態を「収縮状態^{*10}」と呼ばれる状態に変化させる「収縮状態測定^{*11}」によって、標準量子限界が打破可能であると主張して、その正否をめぐる論争が起こった。1985年にケーヴスにより標準量子限界の定式化が精密化されたことにより、論争の焦点は、測定精度の高い収縮状態測定

が物理的に可能であるか否かに絞られた。そのような測定は、前述のハイゼンベルクの仮定(H1)を満たさないので、不確定性原理(3)と矛盾すると考えられた。1988年に筆者の研究により誤差のない収縮状態測定が可能であることが示されて、この論争は解決した^{12,13}。また、この誤差のない収縮状態測定は、不確定性原理(3)を打破することも直接示された。

今日では、式(2)、(3)、(6)、(7)で示されるハイゼンベルク限界は、理論的には打破可能な限界であると考えられている¹⁴。しかし、そうだとすれば、次の課題が残される。式(2)が打破可能であるとしても、ハイゼンベルクが本来目指した、どのような測定によっても破ることのできない測定の普遍的限界は、存在するはずであり、それは、どのように定式化されるであろうか？ また、ハイゼンベルク限界が打破されることは、実際に実験で直接的に検証することができるのであろうか？

不確定性原理の新しい定式化

この課題に対して、2003年に、任意の状態において、2つの物理量 A, B の同時測定の誤差 $\varepsilon(A), \varepsilon(B)$ の間に

$$\varepsilon(A)\varepsilon(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\varepsilon(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \quad (8)$$

という関係が普遍的に成り立つことが、一般的な量子測定理論から証明された^{10,15}。ただし、 σ は測定直前のゆらぎを、 $\langle\cdots\rangle$ は測定直前の期待値を表わす。この不等式の形は、これまで想定されたことがなかったもので、「小澤の不等式」と呼ばれるようになった。交換関係(1)から、位置 Q と運動量 P の同時測定に関しては、

$$\varepsilon(Q)\varepsilon(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\varepsilon(P) \geq \frac{\hbar}{4\pi} \quad (9)$$

が成り立つ。また、物理量 A の任意の測定の誤差 $\varepsilon(A)$ とそれに伴う物理量 B の擾乱 $\eta(B)$ については、次の不等式が成り立つ。

*10—自由質点の位置のゆらぎは時間とともに上に開いた放物線を描いて変化する。位置のゆらぎが減少して、与えられた $\tau > 0$ に対して τ 秒後にほとんどゼロになる自由質点の状態を収縮状態と呼ぶ。

*11—測定後の状態が収縮状態になる位置測定。時間間隔 τ 秒ごとに自由質点を収縮状態測定すると、その間、外力の影響がないならば、前回の測定値から次回の測定値がほとんど確実に予言できる。

$$\begin{aligned} & \varepsilon(A)\eta(B) + \varepsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \\ & \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \end{aligned} \quad (10)$$

不等式(8)は、一般化されたハイゼンベルクの不等式(7)と比べて、二つのクロスターム $\varepsilon(A)\sigma(B)$ および $\sigma(A)\varepsilon(B)$ が存在し、この項のおかげで、誤差と擾乱の積 $\varepsilon(A)\varepsilon(B)$ を一般化されたハイゼンベルクの不等式(7)より遥かに小さい値にすることが可能である。

不等式(9)では、 $\sigma(Q)$ または $\sigma(P)$ が無限大ならば、 $\varepsilon(Q)$ 、 $\varepsilon(P)$ を共に無限小にできるので、位置と運動量が同時測定可能な例外的な場合が許容されている。実はそのような可能性は、以前から知られていた。それは、アインシュタイン、ポドルスキー、ローゼンによって発見された2粒子系のいわゆる EPR 状態において、粒子1の位置と粒子2の運動量を測ることによって、粒子1の位置と運動量の同時測定が可能であるというシュレーディンガーの指摘として知られている¹⁶。したがって、不確定性原理の定性的表現としては、「位置と運動量は正確な同時測定が不可能である」という主張の前に「位置と運動量のゆらぎがともに有限な状態においては」という但し書きが必要であることがわかった。

誤差と擾乱の定義

量子測定理論では、測定の過程を被測定系と測定装置の間の物理的相互作用としてモデル化することができる。簡単のため、物理量は有限次のエルミート行列で表わされるとする。今、ある系(被測定系)の時刻 $t=0$ における物理量 A を測定するためにその系と測定装置を時刻 $t=0$ から $t=\Delta t$ まで相互作用させたとする。

この場合、被測定系の任意の物理量 B の擾乱は、測定の前後での B の変化量の2乗平均平方根である。量子力学のハイゼンベルク描像によれば、各時刻 t における物理量 B を表わす行列 $B(t)$ が存在する。したがって、測定直前の B は物理量 $B(0)$ で表わされ、測定直後の B は物理量 $B(\Delta t)$

で表わされるので、その変化量は行列 $B(\Delta t) - B(0)$ で表わされる。したがって、測定の初期状態で定まる平均値を $\langle \cdots \rangle$ で表わすと、 B の擾乱は

$$\eta(B)^2 = \langle [B(\Delta t) - B(0)]^2 \rangle \quad (11)$$

と定義される。

一方、測定誤差とは、測定前の真値と測定によって得られた測定値の差の2乗を平均したものの平方根(2乗平均平方根誤差)を意味する。「測定前の真値」は $t=0$ における物理量 A の値を意味し、行列 $A(0)$ で表わされ、「測定によって得られる測定値」は $t=\Delta t$ における測定装置の指針の位置 M を意味し、行列 $M(\Delta t)$ で表わされる。量子力学では、交換可能な行列に対応する二つの物理量の値は、古典力学と同様に考えることができる。そこで、初めに $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が交換可能な場合を考えよう。この場合は、 $A(0)$ の値が a であり、 $M(\Delta t)$ の値が m である結合確率 $P(a, m)$ が量子力学から定まる。したがって、この場合の測定誤差は、

$$\varepsilon(A)^2 = \sum_{a, m} (a - m)^2 P(a, m) \quad (12)$$

と定義される。また、この式は、

$$\varepsilon(A)^2 = \langle [A(0) - M(\Delta t)]^2 \rangle \quad (13)$$

と同等である。ただし、 $\langle \cdots \rangle$ は、測定の初期状態から定まる平均値を表わす。したがって、誤差 $\varepsilon(A)$ は、式(12)で定義されたといってもいいし、式(13)で定義されたといってもいい。

問題は、 $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が交換可能でない場合である。この場合は、一般に、 $A(0)$ の値が a であり、 $M(\Delta t)$ の値が m である結合確率 $P(a, m)$ が存在しないので、式(12)によって $\varepsilon(A)$ を定義することはできない。しかし、式(13)の右辺の値は存在するので、式(13)によって $\varepsilon(A)$ を定義することができる。この式では、誤差は真値を表わす物理量 $A(0)$ と測定値を表わす物理量 $M(\Delta t)$ の差の2乗平均平方根として定義される。つまり、古典力学では、 $A(0)$ の値 a と $M(\Delta t)$ の値 m の差を2乗して平均したものと、 $A(0)$ と $M(\Delta t)$ の差 $A(0) - M(\Delta t)$ の値を2乗して平均したものは同じものであるが、量子力学では、後者だけが意味を

もつ。

古典力学では一義的に決まる概念でも、量子力学では一義的に決まらないことはよく知られている。たとえば、古典力学では、 Q^2P^2 、 QP^2Q 、 $(Q^2P^2+P^2Q^2)/2$ は同一の物理量を表わすが、量子力学的では、 Q^2P^2 はエルミート行列でないので物理量を表わさず、 QP^2Q と $(Q^2P^2+P^2Q^2)/2$ は異なる物理量を表わす^{*12}。同様に誤差の定義式も式(13)の他にいくつかの理論的可能性があるが、どの定義を選ぶべきかは、理論展開の容易さ、理論的帰結の豊かさ、実効的計測可能性等の基準に依存する。

誤差論の創始者ガウス¹⁷は、誤差に対してはある損失が対応するが、個々の観測の誤差をどのような損失に相当させるべきかは決して自明なことではないと述べている。2乗平均を採用するにあたって、常に正の値をとる関数で最も単純なものとして、2乗関数が用いられるべきであると述べている。また、ラプラスが同じ問題に対して、絶対値関数を採用したことについて、それが微分不可能であり、高度な解析的扱いに逆行するので、2乗関数のほうが優れていると述べている。この判断は歴史的に正しかった。誤差とは、測定値の信頼性に関する一つの尺度であり、どの尺度が最も有効かに対してア・プリオリに正しい判断が存在するという考えは、ガウスにもなかったが、標準的な尺度を定めることの有効性は、十分に明らかであった。

なお、測定装置としてどうかと思われるものでも、ある状態で誤差ゼロの測定ができる場合がある。たとえば、針が60 kgのところ固定された壊れた体重計で x kg の体重の人の体重を量ると、誤差は $|x-60|$ kg となり $x=60$ なら誤差はゼロである。誤差が真値と測定値の差に由来する損失を測るということから、当然、まぐれ当たりで損失を免れる場合が生まれる。そのことがその測定装置がいいということをまったく意味していないこ

とは、たとえば、わからない問題に対しては、まぐれ当たりを期待した解答を書くこともあるが、まぐれ当たりを目指して受験準備をする受験生はいないことから明らかであろう。

また、誤差の定義は測定される状態に依存するべきではないという意見もあるが、状態に依存した誤差の定義から状態に依存しない定義を得ることは容易であるので、状態に依存した誤差の概念は、状態に依存しない誤差概念の上位概念であると位置づけることができる。たとえば、顕微鏡による位置測定の誤差が、顕微鏡の分解能と見なされるのは、測定対象が顕微鏡の視野の中に局在する非常に限られた状態においてのみであり、分解能という概念もまた対象の状態と無関係に定義されるものではない。

誤差の計測法

式(13)にもとづいた誤差の定義の優位性として、その実効的計測可能性がある。定義式(13)からわかるように、 $\varepsilon(A)$ を計測する方法の一つは、 $A(0)-M(\Delta t)$ に対応する物理量を多数回測定して、測定値を2乗して平均し、平方根をとればよい。しかし、 $A(0)-M(\Delta t)$ に対応する物理量が何なのかは、測定装置の仕組みを熟知していなければわからないので、このような方法は実際的ではない。一方、まず、時刻 $t=0$ に $A(0)$ を測って測定値 a を得、次に、時刻 $t=\Delta t$ に $M(\Delta t)$ を測って、測定値 m を得るということを多数回行い、それらの差を2乗し、平均して、平方根をとれば、 $\varepsilon(A)$ が得られそうに思われる。しかし、実はこの方法では、 $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が交換可能でない場合に、 $A(0)$ を測定する過程で $M(\Delta t)$ の値が変化してしまい、正しい $\varepsilon(A)$ が得られない。

このような欠陥を取り除いた新しい計測法が最近研究されていて、それを「弱測定法」と呼ぶ。この方法は、 $A(0)$ を測るときにその影響を与えないように弱く測定し、引き続いて $M(\Delta t)$ を通常の方法で測定する。弱く測定することにより、個々の測定値の信頼度は下がるが、多数回のデー

^{*12}— QPQ と $(Q^2P+PQ^2)/2$ は、交換関係のおかげでたまたま同一の物理量を表わす²。

タの統計により、 $A(0)$ の値が a であり、 $M(\Delta t)$ の値が m である弱結合確率 $P_w(a, m)$ が得られる。弱結合確率とは、複素数や負の値をとることもある結合確率の拡張概念であるが、 $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が交換可能でないときにも、理論的に存在し、弱測定の方法で計測可能なものである。この弱結合確率を用いると、測定誤差は、

$$\varepsilon(A)^2 = \sum_{a,b} (a-m)^2 \Re P_w(a, m) \quad (14)$$

と式(12)と同様の式で計算される。ただし、 $\Re$ は実数部分を表わす。

他に、この弱測定法を簡略化した方法として、「3状態法」と呼ばれる方法が開発されている¹⁸。これは、初期状態 ϕ で $A(0)$ の弱測定を行う代わりに、初期状態として $\phi, A\phi, (A+\hat{I})\phi$ という3種の状態を準備する方法であり、これらの状態で $M(\Delta t)$ を測定すると、「弱測定法」で得られるデータと同等のデータを得ることができる。

実験的検証

小澤の不等式(10)の検証実験は、 A, B がスピン成分の場合にウィーン工科大学原子研究所の長谷川祐司准教授と共同研究で進められた。長谷川氏とは、私がアドバイザーを務めていた科学技術振興機構「量子と情報」領域さきがけ研究が縁となって2004年に知り合った。長谷川氏は、ウィーンの原子研究所で世界で初めて中性子干渉実験を成功させたラオホ教授の後継者であり、中性子を用いた量子力学の基本原則の検証実験の研究を当研究所で10年以上続けてきた実績をもつ。中性子を用いた実験は、光を用いた同様の実験と比べて極めて高い測定精度が得られることに特色がある。年2回泊まり込みで行われた領域報告会で親交を深めるにつれて、「小澤の不等式」の検証実験を長谷川氏の装置による中性子のスピン測定で実現することに話がまとまっていった。

一般化されたハイゼンベルクの不等式(6)がスピン成分の射影測定で破られることは既に発見していた¹⁹ので、スピンの射影測定を含む様々なパ

ラメータ値で制御されるスピン測定の実験状況を設定し、それぞれのパラメータ値に対する誤差と擾乱を3状態法で求めることを目標とした。私の理論計算では、すべてのパラメータ値において、従来の不等式(6)は不成立であり、新しい不等式(10)は成立するということが期待された。

詳しく述べると、対象となる測定装置は x 軸から y 軸に角度 ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi/2$)だけ振った方向のスピン成分 $\sigma_\phi = \cos \phi \sigma_x + \sin \phi \sigma_y$ を射影測定する装置で、スピンの状態が $\phi = |\sigma_z = 1\rangle$ の場合に $A = \sigma_x$ に対する誤差と $B = \sigma_y$ に対する擾乱を3状態法で計測するものである。理論計算によると、

$$\varepsilon(A) = 2 \sin \frac{\phi}{2}, \quad (15)$$

$$\eta(B) = \sqrt{2} \cos \phi \quad (16)$$

が得られる。状態 $\phi = |\sigma_z = 1\rangle$ に対しては、下限の値とゆらぎは、それぞれ、 $\frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| = 1$ および $\sigma(A) = \sigma(B) = 1$ を満たすので、不等式(6)、(10)を書き直すと、

$$\varepsilon(A)\eta(B) \geq 1, \quad (17)$$

$$(\varepsilon(A)+1)(\eta(B)+1) \geq 2 \quad (18)$$

となる。これから、旧不確定性原理(6)と新不確定性原理(10)で許容される誤差 $\varepsilon(A)$ と擾乱 $\eta(B)$ の組をプロットすると、図1のようになる。旧不確定性原理(6)では、領域(H)の下部分は、許容されなかったのが、新不確定性原理(10)では、2つの曲線に囲まれた領域(O)の部分が許容領域に含まれる。また、本実験の設定で得られる $\varepsilon(A), \eta(B)$ の様々な ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi/2$)に対する軌跡を求めると、

$$\eta(B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - \varepsilon(A)^2) \quad (19)$$

が得られ、図1の曲線(E)のようにプロットされる。したがって、この実験で得られる $\varepsilon(A), \eta(B)$ の組はいずれも旧不確定性原理(6)では、許容されなかった値の組であり、確かに新不確定性原理(10)によって拡大された許容領域に含まれている。

実験は順調に進み、データが揃った頃に、光の

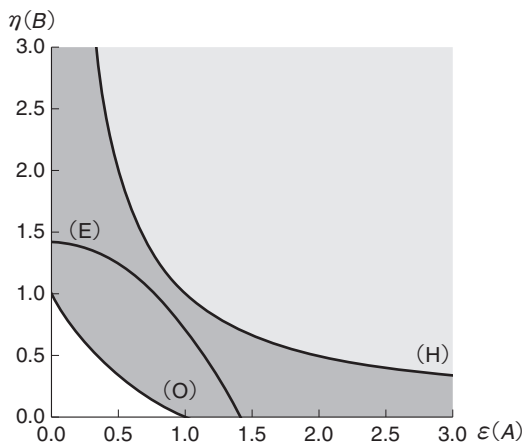


図1—旧不確定性原理の許容領域(H)，新不確定性原理の許容領域(O)，および、スピン成分の射影測定による誤差・擾乱関係(E)

偏光測定に関する「弱測定法」を利用した検証実験が、ルンドとワイズマン²⁰⁾によって提案された。この論文発表は、実験方法だけで実際の実験は行われていなかった。「弱測定法」より「3状態法」のほうが、仮に同じデータをとるのであってもはるかに容易だったため、われわれの実験が一番乗りする成算は十分にあった。論文作成には思いのほか時間を費やし、レフェリーとのやり取りなど紆余曲折もあったが、2012年1月に無事、論文発表にこぎ着けた²¹⁾。ルンドとワイズマンの方法は、カナダでスタインバーグのグループが実験を行い、今年3月の米国物理学会の春季ミーティングなどで学会発表を行っている。論文発表は楽しみだが、まだのようだ。国内では、春の物理学会で東北大の枝松グループによって光の偏光測定における「3状態法」による検証実験に関する発表があった。

* *

不確定性原理は、量子力学の根本原理として、高校の教科書にも紹介されている。しかし、「どんな測定も越えることができない誤差の限界」を正しく定式化するという問題の解決には、ハイゼンベルクの提唱以来80年近くを費やしたことになる。量子力学は古典力学と異なり、測定の理論が不可欠であるとは、草創期から言われてきたことであるが、量子測定理論の確固とした基礎がで

きたのは、実験技術の進歩により、光通信や重力波検出などの新しい試みが現れて後、1980年代に量子測定の概念が完全正写像値測定という数学概念で完全に特徴付けられるということが示されてからである²²⁾。この成果によって、「どんな測定も越えることのできない」という言葉を数学に翻訳することが可能になった。しかし、まだ、「誤差」という概念の定義ができていなかった。本稿で解説した誤差概念は、1988年、標準量子限界の正否をめぐる議論で定式化が与えられた¹²⁾。弱値や弱測定という概念は、同じ頃、アハラノフらによって導入されたが、上の誤差の定義には、それとは独立に、弱結合確率に対応する概念が用いられた。この1988年の論文で、ハイゼンベルクの不等式を満たさない位置測定のモデルが初めて構成された。

科学的主張には、反証可能性がなければならないとよく言われる。また、科学的主張の検証は、何らかの理論とまったく独立には行われえないという意味で理論負荷性があると言われる。ハイゼンベルクによる不確定性原理の定式化には、曖昧な点が多くそのままでは反証可能性がなかったと言えるであろうし、量子測定理論や誤差の理論が完備された最近まで、その検証を行うための理論的整備がなかったと言えるであろう。本稿で議論してきたように、量子測定理論の現在までの成果は、誤差と擾乱の定義を与え、その計測方法を明らかにし、ハイゼンベルクの定式化の破れを予測するとともに、普遍的な関係式を明らかにし、それらの予測を実験のデータとして実証することに成功した。

量子測定の誤差と擾乱に関する基本関係式とその計測可能性は、新しい計測可能量に関する新しい科学・技術の発展を予想させる。既に、「小澤の不等式」から、従来、ウィグナー・荒木・柳瀬の定理と呼ばれてきた、保存法則の下での量子測定の制約を定量的に一般化する公式が導かれ、量子計算の精度限界の導出に利用されている。また、量子暗号は、不確定性原理にもとづいて暗号の安全性が担保されるとされてきたが、本研究で示さ

れた新しい不確定性原理と誤差と擾乱の計測技術は、より強力で汎用的な新しい量子暗号技術に応用されることが期待される。

文献

- 1—天野清, 量子力学史, 中央公論社(1973)
- 2—J. von Neumann, Mathematische Grundlagenten der Quantenmechanik, Springer, Berlin(1932)[J. フォン・ノイマン著, 広重徹・他訳: 量子力学の数学的基礎, みすず書房(1957)]
- 3—W. Heisenberg: Z. Phys., **43**, 172(1927)[ハイゼンベルク著, 河辺六男訳: 「量子論的な運動学および力学の直観的内容について」, 世界の名著 66, 湯川秀樹・井上健編, 中央公論社(1970) pp. 325~355].
- 4—E. H. Kennard: Z. Phys., **44**, 326(1927)
- 5—M. A. Nielsen & I. L. Chuang: Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press(2000)
- 6—H. P. Robertson: Phys. Rev., **34**, 163(1929)
- 7—E. Arthurs & M. S. Goodman: Phys. Rev. Lett., **60**, 2447(1988)
- 8—S. Ishikawa: Rep. Math. Phys., **29**, 257(1991)
- 9—M. Ozawa: in 'Quantum Aspects of Optical Communications', C. Bendjaballah et al. eds., Springer(1991)pp. 3~17
- 10—M. Ozawa: Phys. Rev. A, **67**, 042105(2003)
- 11—V. B. Braginsky et al.: Science, **209**, 547(1980)
- 12—M. Ozawa: Phys. Rev. Lett., **60**, 385(1988)
- 13—J. Maddox: Nature, **331**, 559(1988)
- 14—V. Giovannetti et al.: Science, **306**, 1330(2004)
- 15—M. Ozawa: Int. J. Quant. Inf., **1**, 569(2003)
- 16—E. Schrödinger: Naturwissenschaften, **23**, 807; 823; 844(1935)[シュレーディンガー著, 井上健訳, 「量子力学の現状」, 世界の名著 66, 湯川秀樹・井上健編, 中央公論社(1970)pp. 357~408]
- 17—カール・F. ガウス著, 石川耕春・飛田武幸訳: 誤差論, 紀伊國屋書店(1981)
- 18—M. Ozawa: Ann. Phys. (N.Y.), **311**, 350(2004)
- 19—M. Ozawa: J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **7**, S672(2005)
- 20—A. P. Lund & H. M. Wiseman: New J. Phys., **12**, 093011(2010)
- 21—J. Erhart et al.: Nature Phys., **8**, 185(2012)
- 22—M. Ozawa: J. Math. Phys., **25**, 79(1984)