九大 IMI 共同利用研究会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験」(九大 IMI，2022.7.21–23)

量子測定とは何を測定するのか：
測定誤差の定義と測定値の観測者独立性

中部大学・名古屋大学

小澤正直

量子力学に対する von Neumann の公理系

- **公理 Q1 (状態と物理量).** 任意の量子系 S には，S の状態空間と呼ばれる，ある *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ が対応する． S の状態 には，$\mathcal{H}$ 上の密度作用素が対応し，S の物理量には，$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素が対応する．

- **公理 Q2 (Born の統計公式).** 任意の物理量 A は任意の状態 ρ で測定可能で，その測定値 x の確率分布は次式で与えられる．これを物理量 A の状態 ρ における確率分布と呼ぶ．

$$\Pr\{A \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta)\rho] \quad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathrm{R})).$$

- **公理 Q3 (時間発展).** 系 S は，時刻 t から $t+\tau$ の間,（時間に依存しない）*Hamiltonian* H をもつ孤立系とする．もし，系 S が時刻 t で状態 $\rho(t)$ にあるならば，時刻 $t+\tau$ における系 S の状態 $\rho(t+\tau)$ は次式で与えられる．

$$\rho(t+\tau) = e^{i\tau H/\hbar}\rho(t)e^{-i\tau H/\hbar}.$$

- **公理 Q4 (合成系).** $\mathcal{H}$ **を状態空間とする系** S_1 **と** $\mathcal{K}$ **を状態空間とする系** S_2 **の合成系** $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$ **の状態空間はテンソル積** $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ **で与えられ，**S_1 **の物理量** A **は** S_1 **の物理量** $A \otimes I$ **と同一視され，**S_2 **の物理量** B **は** S **の物理量** $I \otimes B$ **と同一視される.**

完全正値インストルメント

- 定義．$T \in L(\tau c(\mathcal{H}))$ は，任意の $n = 1, 2, \ldots$ について，$T \otimes \mathrm{id}_n$ が $\tau c(\mathcal{H}) \otimes M_n$ 上の正値写像であるとき，完全正値写像と呼ばれる．ただし，id_n は，恒等写像を表わす．

- 記号：$\tau c(\mathcal{H})$=$\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の空間．

  $CP(\tau c(\mathcal{H}))$=$\tau c(\mathcal{H})$ 上の完全正値写像の空間．

- 定義. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対する完全正値 *(CP)* インストルメントとは，$CP(\tau c(\mathcal{H}))$ に値を持つ R 上の **Borel** 測度で $\mathcal{I}(\mathrm{R})$ がトレースを保存するものである．

- すなわち，$\mathcal{I} : \mathcal{B}(\mathrm{R}) \to L(\tau c(\mathcal{H}))$ が **CP** インストルメントであるとは，次の条件が成り立つことである．

  (i) 完全正値性：任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathrm{R})$ に対して，$\mathcal{I}(\Delta)$ は $\tau c(\mathcal{H})$ 上の完全正値写像である．

  (ii) 可算加法性：互いに交わらない列 $\Delta_1, \ldots, \Delta_j, \ldots \in \mathcal{B}(\mathrm{R})$ と任意の $\rho \in \tau c(\mathcal{H})$ に対して次式が成り立つ．

$$\mathcal{I}(\textstyle\bigcup_j \Delta_j)\rho = \sum_j \mathcal{I}(\Delta_j)\rho.$$

  (iii) 単位性：任意の $\rho \in \tau c(\mathcal{H})$ に対して次式が成り立つ．

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\mathrm{R})\rho] = \mathrm{Tr}[\rho].$$

量子測定の普遍モデル：間接測定モデル

- **定義.** $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$: 間接測定モデル（または，測定過程）$\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \text{Hilbert 空間（プローブ系の状態空間）}\\
\xi &= \mathcal{K}\text{ に属する単位ベクトル（プローブ系の初期状態）}\\
U &= \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}\text{ 上のユニタリ作用素（測定相互作用による時間発展）}\\
M &= \mathcal{K}\text{ 上の自己共役作用素（メーター物理量）}
\end{aligned}
$$

- **定理**（完全正値インストルメントの表現定理）. 任意の間接測定モデル $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ は，関係

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho\otimes|\xi\rangle\langle\xi|)U^{\dagger}(I\otimes E^{M}(\Delta))].$$

で CP インストルメント $\mathcal{I}$ を定め，次の統計的性質を持つ.

(i) 出力分布：　$\Pr\{\mathrm{x}\in\Delta\|\rho\} = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho].$

(ii) 条件付き出力状態：　$\rho_{\{\mathrm{x}\in\Delta\}} = \dfrac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]}.$

逆に，すべての CP インストルメントはある間接測定モデルによって定まる.

MO, *J. Math. Phys.* **25**, 79 (1984).

古典的測定の二乗平均平方根誤差

- 変量 Θ の値を直接観測可能な変量 Ω によって測定（推定）する場合,

$$N = \Omega - \Theta$$

  を誤差と呼ぶ.

- 一般に，Θ と Ω は確率変数で，$\mu(\theta, \omega)$ を Θ, Ω の結合確率分布とする．N の平均的な値を平均誤差と呼ぶが，単純な平均は正の誤差と負の誤差が相殺して具合が悪い.

- **Laplace** は，N の絶対値の平均，絶対平均誤差

$$\varepsilon_L(\Omega, \Theta) = \langle |N| \rangle = \sum_{\theta,\omega} |\theta - \omega| \mu(\theta, \omega)$$

  を提案したが，その後，**Gauss** が，二乗平均を提案し，その平方根である二乗平均平方根誤差が，今日まで平均誤差の標準的定義とされている：

$$\varepsilon_G(\Omega, \Theta) = \langle N^2 \rangle^{1/2} = \left(\sum_{\theta,\omega} (\omega - \theta)^2 \mu(\theta, \omega) \right)^{1/2}$$

- この値は，結合確率分布 $\mu(\mu, \theta)$ だけで決まるので，以下

$$\varepsilon_G(\mu) = \left(\sum_{\theta,\omega} (\omega - \theta)^2 \mu(\theta, \omega) \right)^{1/2}$$

  と定義する.

正しい古典測定とは？

- 変量 Θ の値（真の値）を直接観測可能な変量 Ω の値（測定値）によって測定する場合, 次の関係が成り立つとき，正確な測定であると言う.

$$\Pr\{\Omega = \Theta\} = \sum_{(\theta,\omega):\theta\neq\omega} \mu(\theta,\omega) = 1.$$

- 定理．真の値と測定値が結合確率分布 μ をもつ測定が正確であるための必要十分条件は, $\varepsilon_G(\mu) = 0$ である.

- 証明.

$$\varepsilon_G(\mu)^2 = \sum_{(\theta,\omega):\theta\neq\omega} (\omega-\theta)^2 \mu(\theta,\omega)$$

から明らか.

状態 Ψ における物理量 X, Y の結合確率分布とは?

- 確率分布 $\mu(x,y)$ が X, Y の任意の多項式 $p(X,Y)$ の量子論的期待値を再現すること．つまり，確率分布 $\mu(x,y)$ が任意の多項式 $p(X,Y)$ について，

$$(\Psi, p(X,Y)\Psi) = \textstyle\sum_{x,y} p(x,y)\mu(x,y)$$

  が成り立つとき，$\mu(x,y)$ を状態 Ψ における X, Y の結合確率分布と呼ぶ．

- 定理．状態 Ψ における物理量 X, Y の結合確率分布が存在するための必要十分条件は，Ψ が X, Y の同時固有状態の重ね合わせであることである．

量子完全相関

- **定義 (MO 2006): 物理量 X, Y が状態 Ψ において完全相関する Ψ $(X =_{\Psi} Y)$ iff $X \leftrightarrow_{\Psi} Y$ かつ $\Pr\{X = x, Y = y \| \Psi\} = 0$ if $x \neq y$.**

- **定理 (MO 2006). 次の条件は同値.**

  (i) $X =_{\Psi} Y$.

  (ii) Ψ は X と Y の共通の固有値に対する同値固有ベクトルの重ね合わせ，すなわち，$\Psi = \sum_x c_x |X = x, Y = x\rangle$.

  (iii) $\sum_x P^X(x) \wedge P^Y(x)\psi = \psi$.

  (iv) 任意のボレル関数 f によって $f(X)\Psi$ で張られる巡回部分空間 $\mathcal{C}(X, \psi)$ に属する任意の状態 Φ に対して，X と Y の確率分布が一致する，すなわち，

$$(\Phi, E^X(x)\Phi) = (\Phi, E^Y(x)\Phi) \quad (x \in \mathrm{R}).$$

- **定理 (MO2006). 関係 $=_{\Psi}$ は同値関係であり，とりわけ，推移的である，すなわち，$X =_{\Psi} Y$ かつ $Y =_{\Psi} Z$ ならば，$X =_{\Psi} Z$.**

正しい量子測定とは?

- 定義．間接測定モデル M が系 S の状態 ψ において物理量 A の正しい測定であるとは，状態 $\psi \otimes \xi$ において $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が量子完全相関することである，すなわち，

$$\boldsymbol{A(0) =_{\psi\otimes\xi} M(\Delta t).}$$

- 注意．測定が正しいと被測定物理量の確率分布と測定値の確率分布は一致するが，このことは測定が正しいことの必要条件であって，十分条件にはならない．

- 定理．間接測定モデル M が系 S の状態 ψ において物理量 A の正しい測定であるための必要十分条件は，ψ と直交しない，A の任意の固有状態が U によって同一の固有値に対する $I \otimes M$ の固有状態に変換されることである．つまり，

$$(\phi, \psi) \neq 0 \text{ かつ } A\phi = a\phi \text{ ならば } (I \otimes M)U(\phi \otimes \xi) = aU(\phi \otimes \xi).$$

測定値の観測者独立性

- **S: 被測定系．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ で表される．**
- **E: 環境系．Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ で表される．**
- **A: 系 S の被測定物理量．**
- **M_1, M_2: 環境系 E に属する互いに可換なメータ物理量．空間的に離れた二人の観測者に対応する．**
- **全系の時間発展を表す $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ変換は次のハイゼンベルク作用素 $A(0)$, $M_j(t)$, $(j = 1, 2)$ $0 < t$, を定める．**

$$
\begin{aligned}
A(0) &= A \otimes I, \\
M_j(t) &= U(t)^\dagger (I \otimes M_j) U(t),
\end{aligned}
$$

- ψ と ξ を系 S と環境系 E の状態とする. それぞれの観測者の POVM は次式で定義される.

$$\boldsymbol{\Pi}_j(y) \quad = \quad \langle \xi | P^{M_j(t)}(y) | \xi \rangle.$$

- 系の状態 ψ において観測者 j は測定値 x を次の確率で得る.

$$\mathbf{Pr}\{M_j(t) = x \| \psi \otimes \xi\} \quad = \quad \langle \psi | \boldsymbol{\Pi}_j(x) | \psi \rangle.$$

- 次の仮定を設ける：二人の観測者は物理量 A の確率分布を正しく再現する，すなわち，任意の状態 ψ に対して，

$$\mathbf{Pr}\{M_j(t) = x \| \psi \otimes \xi\} \quad = \quad \mathbf{Pr}\{A(0) = x \| \psi \otimes \xi\}.$$

- または，

$$\boldsymbol{\Pi}_j(x) = P^A(x).$$

- $M_1(t)$ と $M_2(t)$ は可換なので，初期状態 $\psi \otimes \xi$ におけるそれらの結合確率分布が存在する.

$$\mathrm{Pr}\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \| \psi \otimes \xi\} = \langle \psi \otimes \xi | P^{M_1(t)}(x) P^{M_2(t)}(y) | \psi \otimes \xi \rangle.$$

したがって，量子力学は上の結合確率が完全相関を示すか，否かを決めることができる. この時，次の定理が成り立つ.

- 定理 1. 同一の物理量 A を二人の観測者が測定すると，それぞれの測定値は一致する：$x \neq y$ ならば

$$\mathrm{Pr}\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \| \psi \otimes \xi\} = 0.$$

測定の所有値再現可能性から観測者独立性へ

- 定理 2 (MO2006). メータ $M(t)$ による物理量 A の測定が正しい POVM Π を持つ，つまり，$\Pi = P^A$ を満たすならば，所有値再現可能性を満たす，すなわち，

$$A(0) =_{\psi\otimes\xi} M(t)$$

がすべての ψ に対して成立する.

- 定理 1 の証明：定理 2 から

$$M_1(t) =_{\psi\otimes\xi} A(0) \quad \text{かつ} \quad A(0) =_{\psi\otimes\xi} M_2(t).$$

完全相関の推移性率から

$$M_1(t) =_{\psi\otimes\xi} M_2(t).$$

したがって，$x \neq y$ ならば

$$\Pr\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \| \psi \otimes \xi\} = 0$$

が成り立つ.

二乗平均平方根誤差概念の量子測定への拡張

- **Hilbert** 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間とする系 S の物理量 A の測定に関する間接測定モデル $\mathrm{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{A(0) = A \otimes I, \quad M(0) = I \otimes M, \quad M(\Delta t) = U^{\dagger}(I \otimes M)U}$$

とする.

- 誤差作用素を

$$\boldsymbol{N(A, \mathrm{M}) = M(\tau) - A(0)}$$

と定義する.

- 系 S の状態 ψ で測定を行なうとき，その二乗平均平方根

$$\boldsymbol{\varepsilon_{NO}(A, \psi) = \langle \psi \otimes \xi | N(A, \mathrm{M})^2 | \psi \otimes \xi \rangle^{1/2}}$$

を系 S の状態 ψ における誤差作用素による量子二乗平均平方根誤差と呼ぶ.

誤差作用素による量子二乗平均平方根誤差の性質

- $\boldsymbol{A(0)}$ と $\boldsymbol{M(\Delta t)}$ が可換なときは，状態 $\psi \otimes \xi$ における $A(0)$ と $\boldsymbol{M(\Delta t)}$ の結合確率分布 $\boldsymbol{\mu_{A(0),M(\Delta t)}(\theta,\omega)}$ が存在する．

$$\boldsymbol{\mu_{A(0),M(\Delta t)}(\theta,\omega) = (\psi \otimes \xi, E^{A(0)}(\theta)E^{M(\Delta t)}(\omega)\psi \otimes \xi)}$$

- この場合は，状態 $\psi \otimes \xi$ における真の値 $A(0)$ と測定値 $M(\Delta t)$ の結合確率分布が存在するので，古典的な定義を適用して，$\boldsymbol{\varepsilon_G(\mu_{A(0),M(\Delta t)})}$ がこの測定の二乗平均平方根誤差と考えられる．

- 定理．誤差作用素による量子二乗平均平方根誤差は，この定義と整合的で，

$$\boldsymbol{\varepsilon_{NO}(A,\psi) = \varepsilon_G(\mu_{A(0),M(\Delta t)})}$$

  が成り立つ．

- では，何が問題か？$\boldsymbol{A(0)}$ と $\boldsymbol{M(\Delta t)}$ が非可換なときは，誤差がゼロでも測定が正しくない場合がある．

誤差作用素による誤差の定義が適切でない例

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

として，A を測定する代わりに M を射影測定するモデルを考えると，

$$\boldsymbol{\varepsilon_{NO}(A, \psi, M) = \|A\psi - M\psi\|}$$

が成り立ち，

$$\boldsymbol{\varepsilon_{NO}(A, \psi, M) = 0}$$

となるが，

$$\boldsymbol{\langle\psi|P^A(2)|\psi\rangle = 1/2}, \quad \boldsymbol{\langle\psi|P^M(2)|\psi\rangle = 0}.$$

より，被測定物理量の確率分布と測定値の確率分布が一致しないので，測定は正確ではない．

量子 2 乗平均平方根誤差

状態 ψ において間接測定モデル M による物理量 A の測定に関する量子２乗平均平方根誤差を一般に $\varepsilon(A, \psi, \mathrm{M})$ と表し，それが満たすべき条件を考察する．

(I) （操作的定義可能性）$\varepsilon(A, \psi, \mathrm{M})$ は，間接測定モデル M の測定値の確率分布を定める POVM Π, 被測定量 A，被測定状態 ψ によって定義可能である．

(II) （対応原理）$A(0)$ と $M(\tau)$ の結合確率分布 $\mu(x, y)$ が存在すれば，古典的２乗平均平方根誤差と一致する．すなわち，

$$\varepsilon(A, \psi, \mathrm{M}) = \mu_G(\mu)$$

が成り立つ．

(III) （健全性）間接測定モデル M による状態 ψ における物理量 A の測定が正確ならば，$\varepsilon(A, \psi, \mathrm{M}) = 0$ が成り立つ．

(IV) （完全性）$\varepsilon(A, \psi, \mathrm{M}) = 0$ ならば間接測定モデル M による状態 ψ における物理量 A の測定は正確である．

- 定理．誤差作用素型量子２乗平均平方根誤差 $\varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathrm{M})$ は，(I)–(III) の条件を満たす．結合確率分布が存在すれば，(IV) も成り立つが一般には (IV) は成り立たない．

- 真値と測定値の結合確率分布が存在しない場合に誤差作用素による定義をどう改良すればいいか？

- 局所一様量子２乗平均平方根誤差を次のように定義する．

$$\overline{\varepsilon}(A, \psi) = \sup_{t \in \mathrm{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi)$$

この定義から結合確率分布 μ が存在すれば

$$\overline{\varepsilon}(A, \psi) = \varepsilon_{NO}(A, \psi) = \varepsilon(A, \psi)$$

が成り立つ．

次の定理が成り立つ．

- 定理：間接測定モデル M，物理量 A，状態 ψ に対して，次の命題が成り立つ．

  1. 局所一様量子２乗平均平方根誤差 $\overline{\varepsilon}(A, \psi, \mathrm{M})$ は，(I)–(IV) の条件をすべて満たす．
  2. $A(0)$ と $M(\tau)$ の結合確率分布が存在すれば，

  $$\overline{\varepsilon}(A, \psi, \mathrm{M}) = \varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathrm{M})$$

  が成り立つ．
  3. $A(0)^2 = M(\tau)^2 = I$ ならば

  $$\overline{\varepsilon}(A, \psi, \mathrm{M}) = \varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathrm{M})$$

  が成り立つ．

MO, *npj Quantum Inf.* **5**, 1 (2019).

新しい誤差による不確定性原理

一般の間接測定モデル M による近似的同時測定に対して次の形の不確定性関係が成り立つ.

$\varepsilon = \varepsilon_{NO}$ または $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$ とする. 任意の物理量 A, B および状態 ψ に対して, $C_{AB} = \frac{1}{2}|\langle\psi|[A, B$
とおくと, 次の関係が成り立つ.

1. $\varepsilon(A)\varepsilon(B) + \sigma(B)\varepsilon(A) + \sigma(A)\varepsilon(B) \geq C_{AB}$.
2. $\sigma(B)^2\varepsilon(A)^2 + \sigma(A)^2\varepsilon(B)^2$
   $+2\varepsilon(A)\varepsilon(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2 - C_{AB}^2} \geq C_{AB}^2$.