

研究概要

「均整」のとれた集合，配置，図形などに幅広く興味を持っています。たとえば正 20 面体は均整のとれた美しい図形ですが（おそらく多くの人にそう感じてもらえると思いますが）、その直感的な美しさを厳密に述べるのは意外と難しいことではないでしょうか？私の研究の目的は、このような集合や配置の持つ直感的な美しさを組合せ論的に、統計的に、あるいは解析的に様々な視点から定式化することです。また、これら基礎研究の通信理論や流体力学への応用にも興味を持っています。

研究内容

(i) デザイン理論 (Combinatorial Design Theory), 有限幾何 (Finite Geometry)

19 世紀中頃、Jakob Steiner は t -デザインという組合せ配置の存在問題を提示しました。代数的には t -デザインの構成問題は、有限集合の（同じサイズの）部分集合の群軌道から特殊な正則条件を満たす軌道を抽出する問題に帰着されます。軌道分解に基づく 2-デザインの構成法については多くの先行研究がありますが、より一般の t -デザインについては Witt (1938) の多重可移群を用いた理論や Köhler (1979) の巡回群を用いた理論を除いて十分に研究が進展しているとは言えない状況です。

以上を踏まえ、私は Reinhard Laue 氏 (Beyreuth Univ.) や宗政昭弘氏 (東北大) と共に、Köhler の理論の一般化やアフィン幾何の平行束の一般化概念を用いた構成法を検討しています。

参考文献:

1. T.Beth, D.Jungnickel, H.Lenz. *Design Theory*. Cambridge Univ. Press. 1999.
2. P.Dembowski. *Finite Geometries*. Springer. 1968.

(ii) 立体求積公式 (Cubature Formula), 不変調和多項式 (Invariant Polynomial)

多変数関数の積分値を空間内の有限個の点での関数値の重み付き和で近似する公式を cubature formula (CF)、あるいは Euclidean design (ED) といいます。少ない近似点からなる CF の存在問題は、S. L. Sobolev らロシアの解析学者を中心に、多変数直交多項式の共通零点の解析と並行して古くから考えられてきました。また、ある種の最小性をもつ CF (最小 CF) の近似点の集合には、アソシエーションスキームやコヒアラント代数などの代数構造が自然に付随するため、CF の研究は代数的組合せ論や幾何などの分野においても盛況です。

以上の背景のもと、私は坂内英一氏 (上海交通大)、Vesselin Vatchev 氏 (Texas Univ.)、平尾将剛氏 (東京女子大) らと共に、解析学における直交多項式の理論と幾何の距離集合の理論を融合させることにより、少ない近似点からなる CF の存在性や特徴付けに関する基礎研究を進めています。

参考文献:

1. C. Dunkle, Y. Xu. *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. Cambridge Univ. Press. 2001.

(iii) 高次形式 (Forms of degree higher than 2), ワーリング問題 (Waring's problem)

任意の自然数を幾つかの自然数の冪乗和で表すことができるか、という問題をWaring問題といえます。古典的な結果としてLagrangeの定理が知られています。19世紀中頃から20世紀初頭までのLiouville、Schurらによる4乗和、5乗和の結果を経て、Waring問題はHilbert (1909) によって完全に解決されました。

Hilbertの仕事において鍵となったのは、Hilbert恒等式という代数的恒等式の存在証明でした。Reznick (Illinois Univ.) は、有名な論文”Sums of even powers of linear forms” (Memoirs of the AMS, 1992) の中で、Hilbert恒等式の美しさを様々な視点から論じ、高次形式論の基礎を築きました。Reznickの仕事を受け、最近では、Hilbert恒等式の明示的な構成法の研究や、べき乗項の各係数の正負の分布の解析など、様々な興味深い課題が当該研究分野を中心に研究されています。

以上の背景のもと、私はReznick氏や野崎寛氏(愛教大)と共に、Hilbert恒等式と特殊なCFの相互関係に着目し、Hilbertの定理の単純な別証明やHilbert恒等式の幾何的構成法を検討しています。

参考文献:

L.E.Dickson. *History of the Theory of Numbers* (Vol.II): Carnegie Institute of Washington. 1923.

(iv) 等長埋め込み (Isometric embeddings)

古典的な有限次元のバナッハ空間が2組与えられたとき, 一方の空間の各ベクトルを長さを変えないようにもう一方の空間へ移す線形写像を等長埋め込みといいます. 有名な Dvoretzky の定理 (1961) は, 像空間の次元が十分大きいとき, 所望の埋め込みが常に存在することを保証しています. Dvoretzky の定理には様々な別証明が知られています. しかしながら, オリジナルの証明を含めて既存の証明のほとんどは純解析的議論に基づいており, 埋め込みの具体的な表現を与えるものではありません. そこで Lyubich–Vaserstein (1993) は等長埋め込みと球面積分に対する CF の対応関係に着目し, 種々の等長埋め込みの具体的な表現を与えました. これを受け, 私も等長埋め込みと CF の相互間研究を進めています. またこれに関連して, 有限グラフの離散超立体への等長埋め込み問題にも取り組んでいます.

参考文献:

1. A. Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Springer. 2007.
2. S. Ovchinnikov. *Graphs and Cubes*. Springer. 2011.

(v) 最適計画 (Optimal Experimental Design)

例えば近年話題になっているシェールガスの埋蔵状況を知りたいとして、ガスの埋蔵量の分布が多項式回帰モデルで表されているという少し(かなり)虫の良いことを考えたいとします。このとき観測結果をできるだけ精度良く推定するためには、地球上のどこに観測点を置くと最も良いでしょうか？この問題には最適計画という統計的実験計画の手法が深く関与しています。

問題の一定式化として、観測点の集合は球面(地球)上の幾つかの(有限個の)点での Dirac 測度の実線形結合 μ で表わします。各測度 μ には観測誤差を最小化するような回帰係数 (θ とおく) の最小 2 乗推定量 $\hat{\theta}$ が対応します。この $\hat{\theta}$ の分散を”何かしらの意味で”最小化することが我々の目標になります。多次元の場合、 $\hat{\theta}$ の分散(分散共分散行列)を”最小化する”とはどういうことなのか議論が必要かと思いますが、伝統的に Fisher 情報行列 $M(\mu)$ の固有値の汎関数(最適性基準)が最小化の対象となることがほとんどです。基準関数が与えられたとき、それを最小化する離散測度 μ を最適(実験)計画といいます。

多項式回帰モデルに対する最適計画の最初の論文は、デンマークの統計学者 Kirstine Smith によって発表されました(“On the ‘Best’ Distribution of Observations, *Biometrika*, 1918)。1900 年代中頃、Jack Carl Kiefer は最適計画を凸解析的な視点から捉える理論的枠組みを構築しました。これを受けて、今日では(その弟子)Hedayat, (さらにその弟子)Stufken ら米国学派や Holger Dette らドイツ学派の統計グループによって、最適計画の研究はより高度な理論的枠組みの中で進められています。わが国においても、クワ田、神保、景山、栗木、藤原らによる最適計画と組合せ論(や情報通信理論)の相互関係の研究などが非常に盛況です。

こうした国内外の研究状況を踏まえて、私は有限次元のヒルベルト空間上の線形回帰モデルに対して(離散的な)最適計画の存在および構成法を検討しています。この一般的な設定は古典的な多項式回帰だけでなく、何かしらの周期性のある現象記述モデルである三角回帰やフーリエ回帰も範疇に含まれます。なお一連の研究は神保雅一氏(名大)他との共同研究です。

参考文献:

1. A.C. Atkinson, A.N. Donev. Optimal Experimental Designs. Oxford Univ Pr on Demand. 1992.

(vi) 応用

(a) 組合せデザインの通信理論的応用

Kenichi Kitayama (1994) は2次元画像の光伝送に適した空間CDMA (Code Division Multiple Access) という光CDMA方式を提案しました。この方式では、通信効率を高めるため空間直交符号が必要になります。空間CDMAに関する既存の研究の多くはハードウェアの方向から実験的にその可能性を探るものであり、符号の多重特性の理論検討の論文としてはYang-Kwong (1996), Omrani-Kumar (2006) など数編しか発表されていません。こうした国内外の研究状況を踏まえて、私は空間直交符号と特殊な代数構造をもつ組合せデザインの関係性に着目し、組合せ論的立場から空間直交符号の基礎研究を進めています。

(b) グラフ理論・凸解析の流体力学への応用

流体力学の並列化手法である領域分割法では、分割された個別領域の“バランス”と、分割の際に“削られる部分”の最小化が並列化効率を最大化するために必要です。グラフの辺分割はこうした要請に応えるための有効なアプローチであり、多くの実例が存在します。本研究では、center pointの概念やCaratheodoriの定理など種々の凸解析的手法を用いて、流体力学的に重要なグラフの辺分割アルゴリズムの提案を目指します。またこれに応じて、グラフ分割ソフトMETISの改良可能性についても検討しています。